



Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo Euristico

Introduzione
Metodo Euristico per reti a due livelli
Approfondimenti



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

- La minimizzazione esatta ha due problemi:
 - L'enorme numero di implicanti primi.
 - Può essere dimostrato che il numero degli implicanti primi di una funzione logica di n ingressi può essere maggiore di $3^n/n$.
 - L'intrattabilità del problema di copertura.
 - E' un problema *NP*-completo.
- Soluzione:
 - Miglioramento iterativo della soluzione.
 - Partendo da una **condizione iniziale** (*specifiche della funzione*) la **copertura** è modificata per **cancellazione**, **aggiunta e modifica di implicanti** fino a che non è raggiunta una **condizione di minimalità** (quando nessuna delle operazioni porta a successivi miglioramenti).

- 2 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

- I metodi euristici di minimizzazione differiscono per *qualità* della soluzione.
 - **Qualità**: Differenza in **cardinalità** tra la copertura minimale (euristica) e quella minima (ottenuta con metodi esatti).
- Le soluzioni prodotte da **Espresso** (standard per minimizzazione logica a 2 livelli) coincidono spesso con quelle di **Espresso-Exact**, ma in tempi più brevi.
 - Procedura di minimizzazione:
 - **Ingresso**: Lista dei mintermini/implicanti (ON-set) ed il DC-set della funzione.
 - **Condizione iniziale**: La lista degli implicanti rappresenta la copertura iniziale della funzione.
 - **Sviluppo**: La copertura iniziale viene iterativamente manipolata da alcuni operatori.
 - **Termine**: L'operazione si conclude quando nessun operatore migliora la copertura.

- 3 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici: operatori

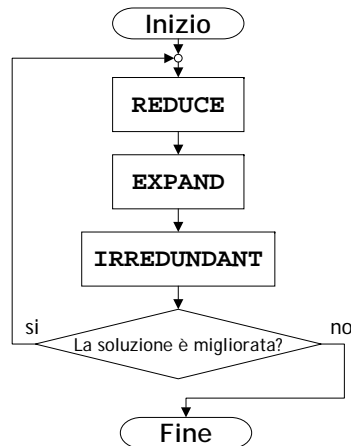
- Gli operatori utilizzati da Espresso sono:
 - **Reduce**
 - riduce i cubi di una copertura (prima) per consentire di uscire da minimi locali in cui si è giunti dopo l'espansione
 - la copertura ottenuta dopo una riduzione non è più costituita da soli implicanti primi ma **deve essere** della **stessa cardinalità** di quella di partenza.
 - Non è aumentato il numero degli implicanti
 - **Expand**
 - espande i cubi rendendoli primi eliminando eventuali cubi coperti.
 - la copertura ottenuta risulta costituita da soli implicanti primi (*copertura prima*)
 - **Irredundant**
 - elimina i cubi ridondanti
 - modifica la cardinalità della copertura riducendola.

- 4 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

□ Algoritmo:



- 5 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

□ Esempio:

Condizione iniziale:
deriva direttamente dalle specifiche del problema

a, b \ c, d	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	-	0
11	1	1	1	0
10	0	0	-	1

Cardinalità: 4
Costo in letterali: 14

Nota: copertura non prima. L'operazione di riduzione non ha alcun effetto poiché si modificherebbe la cardinalità (non ci sono cubi sovrapposti)



Espansione

Mintermine eliminato poiché coperto durante l'espansione

a, b \ c, d	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	-	0
11	1	1	1	0
10	0	0	-	1

Cardinalità: 3
Costo in letterali: 8

Nota: copertura prima. L'operazione irredundant non ha alcun effetto poiché non esistono implicanti ridondanti

- 6 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

□ Esempio (cont.): la soluzione è migliorata, quindi si prosegue

a, b \ c, d	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	-	0
11	1	1	1	0
10	0	0	-	1

Cardinalità: 3
Costo: 8
Nota: copertura prima



Riduzione

a, b \ c, d	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	-	0
11	1	1	1	0
10	0	0	-	1

Cardinalità: 3
Costo: 9
Nota: copertura non prima

- 7 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

□ Esempio (cont.):

a, b \ c, d	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	-	0
11	1	1	1	0
10	0	0	-	1

Cardinalità: 3
Costo: 9
Nota: copertura non prima



Espansione

a, b \ c, d	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	-	0
11	1	1	1	0
10	0	0	-	1

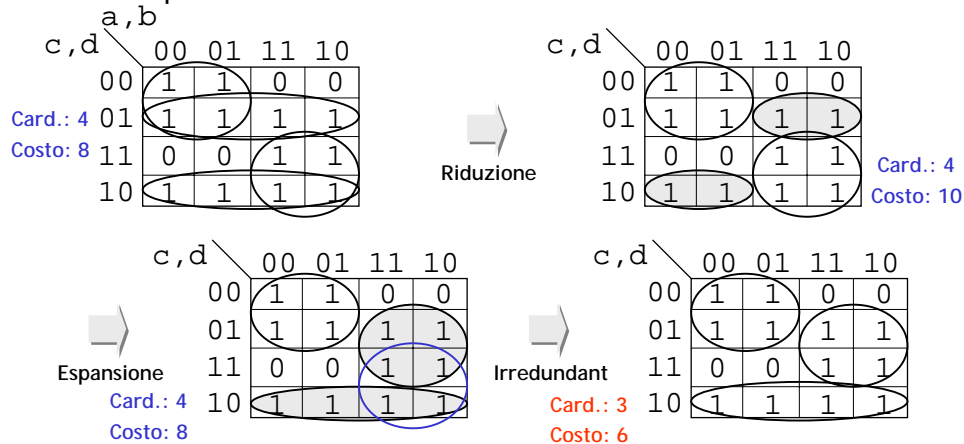
Cardinalità: 3
Costo: 7
Nota: copertura prima
Fine della procedura (l'applicazione di una riduzione porta alla soluzione individuata al passo precedente)

- 8 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici

□ Esempio 2:



- 9 -



Sintesi Combinatoria

Sintesi di reti combinatorie a due livelli
Metodo Euristico

Approfondimento



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - Expand

□ Expand

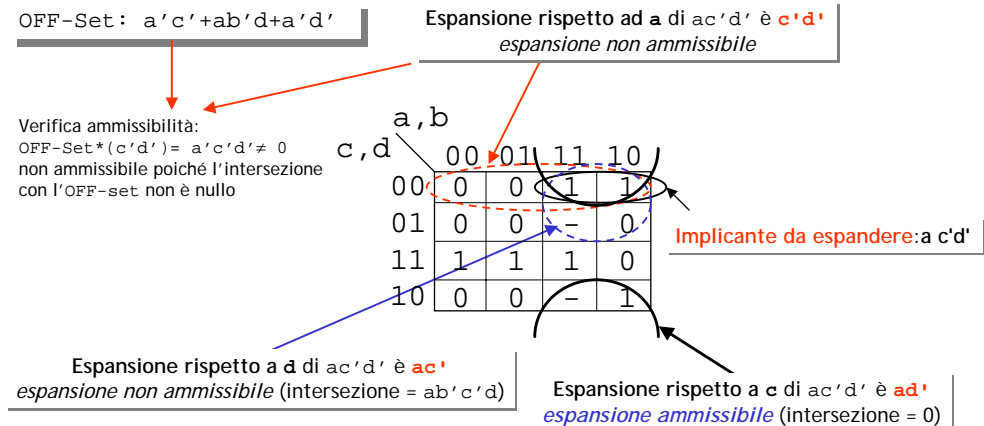
- Gli implicanti relativi alla copertura sono rielaborati uno alla volta. Ogni implicante è espanso a primo e tutti gli implicanti da esso coperti sono eliminati.
- L'operatore Expand rende la copertura prima e minimale. L'espansione di un implicante è realizzata aumentando il sotto cubo ad esso associato in una o più direzioni e verificando se l'espanso è ammissibile
- Verifica dell'ammissibilità dell'espansione:
 - Una espansione è ammissibile se l'implicante ottenuto **non interseca** l'OFF-set. (E' richiesta la conoscenza dell'OFF-set e questo può essere pesante in termini di memoria utilizzata.)
 - **non intersezione**: il prodotto logico tra l'implicante ottenuto e ogni mintermine corrispondente all'OFF-set è 0

- 11 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - Expand: verifica ammissibilità

□ Esempio:

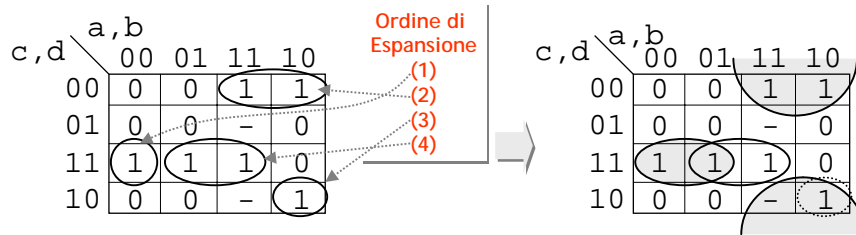


- 12 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - **Expand**

□ Esempio:



Copertura iniziale:

on-set: {ac'd', a'b'cd, bcd, ab'cd'}
dc-set: {abc'd, abcd'}

Copertura finale:

on-set: {ad', a'cd, bcd}
dc-set: {abc'd, abcd'}



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - **Expand**: ordine di espansione degli implicanti

□ La **qualità del risultato** dipende da due fattori:

1. **Ordine di espansione del singolo implicante** (direzione): si espande in tutte le direzioni possibili seguendo un ordine predeterminato (es. lessico-grafico) e si accetta la soluzione migliore.
2. **Ordine degli implicanti da espandere**: si utilizza una **euristica** che consente di ridurre la probabilità di effettuare delle espansioni inutili
 - Gli implicanti sono ordinati in base alla **probabilità sia di essere espansi sia di non essere coperti da altri implicanti**;
 - Ad ogni implicante è associato un peso che **misura** la sua **propensione** alla espansione e alla non-copertura da parte di altri implicanti.
 - L'implicante con peso minore è quello che ha più probabilità di essere espanso e non coperto da altri.
 - Per il calcolo del peso si utilizza, per i letterali, il codice **positional-cube notation**:
 - 0 (variabile in forma **negata**) è codificato con 10
 - 1 (variabile in forma **naturale**) è codificato con 01
 - - (variabile non presente) è codificato con 11
 - 00 non è una codifica ammissibile



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - **Expand - Esempio**

	a'a	b'b	c'c	d'd	Peso	
ac'd'	0 1	1 1	1 0	1 0	3+3+2+1+2=11	(2)
a'b'cd	1 0	1 0	0 1	0 1	2+3+3+2=10	(1)
bcd	1 1	0 1	0 1	0 1	2+3+2+3+2=12	(4)
ab'cd'	0 1	1 0	0 1	1 0	3+3+3+2=11	(3)
	2 3	3 2	1 3	2 2		Ordine

Conteggio per colonna

- Ogni **peso** è calcolato come prodotto interno del vettore conteggio per colonna con il vettore relativo all'implicante, espresso in notazione positional-cube.

• Es: $|01\ 11\ 10\ 10| * |23\ 32\ 13\ 22|^T = 11$

o peso minore \Rightarrow espansione più probabile
o più letterali (un cubo piccolo ha più probabilità di essere espanso poiché richiede pochi 1 e - adiacenti)



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - **Reduce**

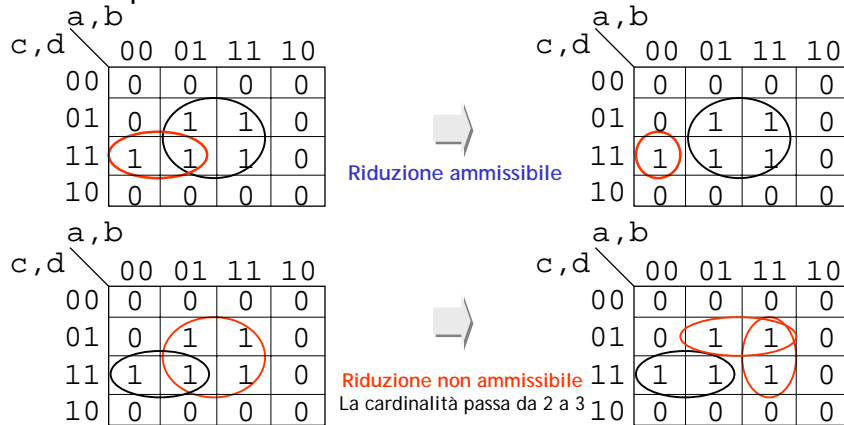
□ **Reduce**

- Trasforma la copertura in un'altra non prima della **stessa cardinalità**.
 - Osservazione: questa trasformazione consente di uscire da minimi locali
- Gli implicanti sono manipolati uno alla volta.
 - questa operazione può ridurre gli implicanti di dimensione.
 - La trasformazione di un implicante è attuata **riducendo** il sottocubo ad esso associato **in una o più direzioni**.
- Una **riduzione** è **ammissibile se e solo se** l'implicante ridotto forma con i rimanenti una **copertura** per la funzione **senza modificarne la cardinalità**.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Reduce*

□ Esempio:



Riduzione ammissibile

Riduzione non ammissibile
La cardinalità passa da 2 a 3

- 17 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Reduce*

- Per evitare di applicare la **reduce** a implicanti che non possono essere ridotti oppure che portano ad una riduzione non ammissibile **si applica una euristica**.
- La regola euristica di scelta:
 - Il primo implicante da ridurre è quello con peso maggiore (peso calcolato come in Expand).
- Esempio (vedi Expand):

Implicanti:	a	b	c	d	
ad'	01	11	11	10	⇒ 3+2+3+1+3+1=13 (1)
bcd	11	01	01	01	⇒ 1+3+3+3+2=12 (3)
acd	01	11	01	01	⇒ 3+2+3+3+2=13 (2)
					Ordine

conteggio per colonna: 13 23 13 12

- 18 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Irredundant*

Irredundant

- Rende la copertura non ridondante.
- Viene scelto un sottoinsieme di implicanti *parzialmente ridondanti* tale per cui ogni implicante non è interamente coperto da un altro dello stesso sottoinsieme
 - la copertura è divisa in tre insiemi
 - *relativamente essenziali*
 - *parzialmente ridondanti*
 - *totalmente ridondanti*
 - Rispetto al metodo esatto, la copertura è costituita da implicanti non tutti necessariamente primi.

- 19 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - *Espresso*

- (1982) ESPRESSO II è basato sulla applicazione di iterate espansioni e riduzioni. Il risultato prodotto da ESPRESSO è una copertura non ridondante spesso di minima cardinalità.
- I passi seguiti da ESPRESSO II sono:
 1. **COMPLEMENT**: Calcola l'OFF-set.
 2. **EXPAND**: Espande a primi gli implicanti e rimuove quelli coperti.
 3. **ESSENTIAL PRIMES**: Estrae gli implicanti essenziali primi e li unisce al DC-set.
 4. **REDUCE**: Riduce ogni implicante a un implicante essenziale minimo.
 5. **EXPAND**: Espande a primi gli implicanti e rimuove quelli coperti.
 6. **IRREDUNDANT COVER**: Trova la copertura minimale non ridondante. Se la soluzione migliora vai al passo 4.
 7. **LASTGASP**: applica per un'ultima volta REDUCE, EXPAND e IRREDUNDANT COVER usando una differente strategia.
 8. **COST**: Se questa operazione ha successo vai al passo 4.
 9. **MAKESPARE**: Adatta la soluzione ad una PLA.

- 20 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi euristici - Espresso

```
Espresso(on_set,dc_set)
off_set=Complement(on_set u dc_set)
on_set=Expand(on_set, off_set) /*copertura prima ridondante*/
on_set=Irredundant(on_set, dc_set)
essential_set=Essentials(on_set, dc_set)
on_set=on_set - essential_set /* toglie 1 dall'on_set */
dc_set=dc_set u essential_set /* e li aggiunge al dc_set */
ripeti
  phi2=Cost(on_set)
  ripeti
    phi1=|on_set|
    on_set=Reduce(on_set,dc_set)
    on_set=Expand(on_set, off_set)
    on_set=Irredundant(on_set,dc_set)
  fino a che (|on_set|< phi1)
  on_set=Last_gasp(on_set,dc_set,off_set)
fino a che (Cost(on_set) < phi2)
on_set=on_set u essential_set
dc_set=dc_set - essential_set
on_set=Make_sparse(on_set,dc_set,off_set)
```

- 21 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Espresso

- Comando:
 - espresso [parametri] [file]
- Funzione:
 - minimizzazione di funzioni logiche a due livelli.
- Parametri:
 - -d: debugging
 - -e[opzioni]: seleziona le opzioni di espresso:
 - fast, ness, nirr, nunwrap, onset, pos, strong, eat, eatdots, kiss, random
 - -o[tipo]: seleziona il formato di uscita:
 - f, fd, fr, fdr, pleasure, eqntott, kiss, cons
 - -s: fornisce un breve sommario relativo all'esecuzione;
 - -t: fornisce un ampio sommario relativo all'esecuzione;
 - -x: non visualizza la soluzione;

- 22 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Espresso

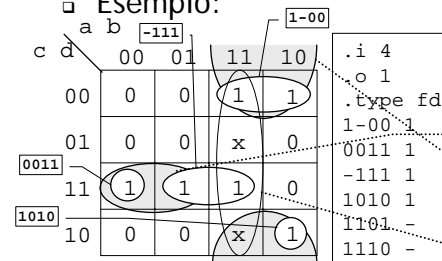
- Parametri (continua):
 - -v[tipo]: messaggi di dettaglio (-v '' per un accurato dettaglio)
 - -D[comando]: esegue il sotto-comando:
 - ESPRESSO, many, exact, qm, single_output, so, so_both, simplify, echo, opo, opoall, pair, pairall, check, stats, verify, PLVerify, equiv, map, mapdc, fsm, contain, d1merge, d1merge_in, disjoint, dsharp, intersect, minterms, primes, separate, sharp, union, xor, essen, expand, gasp, irred, make_sparse, reduce, taut, super_gasp, lexsort, test
 - -Sn: seleziona la strategia per il sotto comando (solo quelli riportati):
 - opo: bit2=esatto, bit1=ripetuto bit0=salta sparse
 - opoall: 0=minimizza, 1=esatto
 - pair: 0=algebrico, 1=strongd, 2=espresso, 3=esatto
 - pairall: 0=minimizza, 1=esatto, 2=opo
 - so_espresso: 0=minimize, 1=exact
 - so_both: 0=minimize, 1=exact

- 23 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Espresso

□ Esempio:



Cubi	Notazione	Pesi	Ordine
	positional-cube		
1-00	1 0 1 1 0 1 0 1	11	2
0011	0 1 0 1 1 0 1 0	10	1
-111	1 1 1 0 1 0 1 0	12	4
1010	1 0 0 1 1 0 0 1	11	3
	2 3 3 2 1 3 2 2		

```
ipeca4>espresso -v " ex3.pla
EXPAND: 0011 1 (covered 0)
EXPAND: 1-00 1 (covered 1)
EXPAND: -111 1 (covered 0)
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
ESSENTIAL: 0:11,1
ESSENTIAL: 1:-0,1
REDUCE: -111 1 to 1111 1 0.00 sec
EXPAND: 1111 1 (covered 0)
# IRRED: F=1 E=1 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=1 Bound=0
REDUCE_GASP: 11:-1 reduced to 1111 1
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
.i 4
.o 1
.p 3
11-- 1
0-11 1
1--0 1
.e
ipeca4>
```

- 24 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Espresso*

□ Esempio:

```
.i 4
.o 3
.type fr
00-1 1-1
01-- 001
1000 0--
1001 --1
1011 -1-
1100 111
1101 000
1110 -10
1111 01-
```

```
EXPAND: 1100 100 (covered 2)
EXPAND: 1011 010 (covered 3)
EXPAND: 1111 010 (covered 0)
EXPAND: 1100 001 (covered 0)
EXPAND: 01-- 001 (covered 0)
# IRRED: F=5 E=5 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=5 Bound=0
ESSENTIAL: 0-- 001
REDUCE: -0-1 111 to -0-1 101 0.00 sec
REDUCE: 1-1- 010 to 1-11 010 0.00 sec
REDUCE: 1-00 011 to 1100 001 0.00 sec
EXPAND: 1100 001 (covered 0)
EXPAND: 1-11 010 (covered 0)
EXPAND: -0-1 101 (covered 0)
# IRRED: F=4 E=4 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=4 Bound=0
REDUCE_GASP: 1-00 011 reduced to 1100 001
REDUCE_GASP: 1-1- 010 reduced to 1111 010
REDUCE_GASP: 11-0 110 reduced to 1100 100
REDUCE_GASP: -0-1 111 reduced to -0-1 101
EXPAND: 1100 111 (covered 0)
# IRRED: F=5 E=2 R=3 Rt=0 Rp=3 Rc=1 Final=3 Bound=0
REDUCE: -0-1 111 to -0-1 101 0.01 sec
EXPAND: -0-1 101 (covered 0)
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
... (continua)
```

```
... (continua)
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
REDUCE_GASP: 1-1- 010 reduced to 111- 010
REDUCE_GASP: 1100 111 reduced to 1100 111
REDUCE_GASP: -0-1 111 reduced to -0-1 101
# IRRED: F=2 E=2 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=2 Bound=0
# IRRED: F=3 E=2 R=1 Rt=1 Rp=0 Rc=0 Final=2 Bound=0
# IRRED: F=3 E=3 R=0 Rt=0 Rp=0 Rc=0 Final=3 Bound=0
EXPAND: -0-1 101 (covered 0)
.i 4
.o 3
.p 4
1100 111
1-1- 010
-0-1 101
0--- 001
.e
```