Sintesi Sequenziale Sincrona

Sintesi comportamentale di reti sequenziali sincrone

Riduzione del numero degli stati per Macchine Completamente Specificate

Indistinguibilità & Equivalenza
Irragiungibilità

versione del 12/12/2004

Sintesi

- La sintesi si svolge nei seguenti passi:
  1. Realizzazione del *diagramma degli stati* a partire dalle specifiche informali del problema
  2. Costruzione della *tabella degli stati*
  3. **Riduzione del numero degli stati**: *ottimizzazione*
  4. Costruzione della *tabella delle transizioni*
     - Assegnamento degli stati: *Codice & codifica*
  5. Costruzione della *tabella delle eccitazioni*
     - Scelta degli elementi di memoria
  6. Sintesi sia della rete combinatoria che realizza la funzione stato prossimo sia della rete combinatoria che realizza la funzione d'uscita

Riduzione del numero degli stati

- Il numero minimo di elementi di memoria (flip-flop) necessari a memorizzare tutti gli stati dell'insieme *S* è:

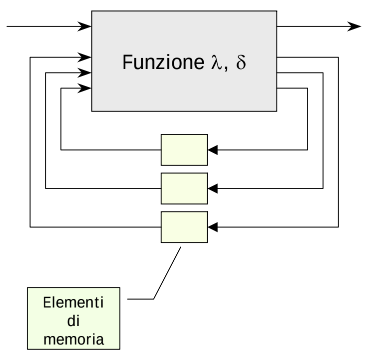
  $$N_{FF,min} = \lceil \log_2 |S| \rceil$$

- Nel modello di una macchina a stati possono esistere stati ridondanti
- L'identificazione ed eliminazione di tali stati comporta:
  - Numero minore di elementi di memoria
  - Reti combinatorie meno costose
    - per **aumento dei gradi di libertà nella sintesi combinatoria**
      - condizioni di indifferenza dovute all'utilizzo parziale delle configurazioni che possono codificare lo stato
    - per **riduzione del numero di bit necessari per codificare gli stati**
      - Minore numero di ingressi e di uscite alle reti combinatorie che realizzano la funzione stato futuro e la funzione d'uscita.

Riduzione del numero degli stati

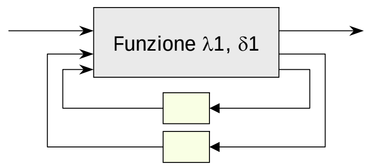
- Esempio

Macchina con 8 stati, 1 ingresso ed 1 uscita



Eliminando 5 stati

Macchina con 3 stati, 1 ingresso ed 1 uscita



3 stati implicano l'uso di 3 codifiche tra le 4 possibili.

	0	1
a	b/0	c/1
b	a/0	c/0
c	b/0	a/0
-	-/-	-/-

Riduzione del numero degli stati

- Lo scopo della riduzione del numero degli stati consiste nell'individuare la *macchina minima equivalente* a quella data
- La *macchina minima equivalente* è quella macchina:
  - Funzionalmente equivalente alla macchina data
  - Avente il minimo numero di stati
- Il problema della riduzione del numero di stati è distinto per macchine
  - completamente specificate: identificazione di stati indistinguibili o equivalenti
  - non completamente specificate: identificazione di stati compatibili
    - **macchina non completamente specificata**: se in corrispondenza di qualche coppia {*stato presente, configurazione di ingresso*} o il simbolo di uscita, o lo stato prossimo o entrambi non sono specificati
- Inoltre, deve essere prevista l'eliminazione degli stati non raggiungibili dallo stato di reset, se questo è specificato

Riduzione del numero degli stati: macchine equivalenti

- Date due macchine completamente specificate M1 e M2 queste si dicono equivalenti se e solo se:
  - per ogni stato s_i di M1, esiste uno stato s_j di M2 tale che ponendo la macchina M1 in s_i e la macchina M2 in s_j
  - e applicando alle due macchine una qualunque sequenza di ingresso I
  - le due sequenze di uscita sono identiche.
  - E viceversa per M2 rispetto ad M1
- Nota: nella definizione di equivalenza sono considerate solo le relazioni ingresso-uscita quindi le due macchine possono avere un insieme di stati diverso e in particolare di diversa cardinalità

Riduzione del numero degli stati: stati indistinguibili di una stessa macchina

- Data una macchina completamente specificata, siano:
  - I_α - una generica sequenza di ingresso $i_j, \ldots, i_k$
  - U_α - la sequenza d'uscita ad essa associata ottenuta attraverso λ.
  - s_i, s_j - due generici stati
- I due stati s_i e s_j appartenenti ad *S* sono *indistinguibili* se:

$$U_{\alpha,i} = \lambda(s_i, I_\alpha) = \lambda(s_j, I_\alpha) = U_{\alpha,j} \qquad \forall\ I_\alpha$$

  - ponendo la macchina in s_i oppure in s_j e applicando una qualsiasi sequenza di ingresso, le uscite sono identiche.
- L'indistinguibilità tra s_i e s_j si indica con: $s_i \sim s_j$

Riduzione del numero degli stati: stati equivalenti di una stessa macchina

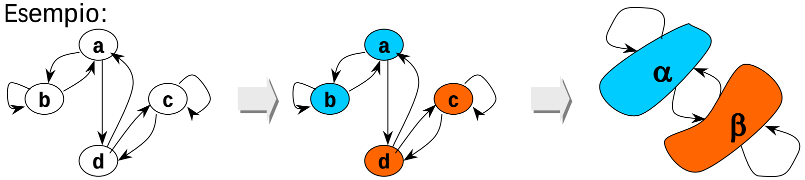
- La relazione di *indistinguibilità* gode di tre proprietà:
  - *Riflessiva:* $s_i \sim s_i$
  - *Simmetrica:* $s_i \sim s_j \leftrightarrow s_j \sim s_i$
  - *Transitiva:* $s_i \sim s_j \wedge s_j \sim s_k \rightarrow s_i \sim s_k$
- Quindi, la relazione di indistinguibilità è una *relazione d'equivalenza*
  - Due stati indistinguibili sono equivalenti e possono essere sostituiti con un solo stato.
- In generale, un gruppo di stati tra loro equivalenti può essere raggruppato in unica classe di equivalenza
- L'insieme delle classi di equivalenza determina l'insieme degli stati della macchina minima equivalente

Riduzione del numero degli stati: partizione di equivalenza

- Formalmente, una *relazione di equivalenza* induce sull'insieme degli stati una *partizione Π_e di equivalenza* tale che
  - due stati appartengono alla stessa classe se e solo se sono equivalenti
  - due stati appartengono a classi diverse se e solo se non sono equivalenti
  - l'insieme S si dice partizionato nelle m classi $C_1, \ldots, C_m$ se:

$$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m = S$$
$$C_i \cap C_j = \varnothing \quad \forall\, i, j : i \neq j$$

- Il nuovo insieme degli stati è formato dalle classi della partizione
- Esempio:



Riduzione del numero degli stati: macchina minima

- Una macchina M è minima se non esiste nel suo insieme degli stati nessuna coppia di stati equivalenti
- Il problema della riduzione degli stati può quindi essere ricondotto a quello della "costruzione" di una macchina equivalente minima a quella data.
- Identificazione della macchina equivalente minima:
  - data una macchina M e la sua partizione di equivalenza indotta dall'indistinguibilità tra stati
  - la macchina M' il cui insieme degli stati è costituito dai blocchi della partizione di equivalenza è la macchina minima equivalente a quella data ed è unica
    - equivalente per costruzione
    - minima per costruzione
    - unica per le caratteristiche di equivalenza

Riduzione del numero degli stati: identificazione degli stati equivalenti

- La definizione di indistinguibilità tra stati è di difficile applicabilità poiché richiederebbe di considerare *tutte* le sequenze di ingresso (a priori infinite)
- Si ricorre ad una regola introdotta da *Paull – Unger*
  - Due stati s_i e s_j appartenenti ad S sono indistinguibili se e solo se per ogni simbolo di ingresso i_a :

    $\lambda(s_i, i_a) = \lambda(s_j, i_a)$ (Le uscite sono uguali per ogni simbolo di ingresso)

    $\delta(s_i, i_a) \sim \delta(s_j, i_a)$ (Gli stati prossimi sono indistinguibili)
- La regola di *Paull – Unger* è iterativa

Riduzione del numero degli stati: identificazione degli stati equivalenti (i)

- Applicando la regola di Paull – Unger agli stati di una macchina, si possono ottenere tre casi

1. $s_i \not\sim s_j$
   - Se i simboli d'uscita sono diversi e/o
   - Se gli stati prossimi sono già stati verificati come distinguibili
2. $s_i \sim s_j$
   - Se i simboli di uscita sono uguali e
   - Se gli stati prossimi sono già stati verificati come indistinguibili
3. $s_i \sim s_j$ se $s_k \sim s_h$ (vincolo)
   - Se i simboli di uscita sono uguali e
   - Se gli stati prossimi non sono ancora stati verificati come indistinguibili

Riduzione del numero degli stati: identificazione degli stati equivalenti (ii)

- Poiché gli insiemi S ed I hanno cardinalità finita, dopo un certo numero di passi i vincoli vengono risolti e ci si troverà in una delle due condizioni:

1. $s_i \nsim s_j$

2. $s_i \sim s_j$

- L'analisi del caso 3. può portare a costruire dei vincoli nei quali è presente circolarità del vincolo: l'indistinguibilità di una coppia di stati è vincolata dall'indistinguibilità della stessa coppia di stati

Riduzione del numero degli stati: tabella delle implicazioni (i)

- Le relazioni di indistinguibilità o equivalenze possono essere identificate attraverso l'uso della **Tabella delle Implicazioni**
- La tabella ha le seguenti caratteristiche:
  - Mette in relazione ogni coppia di stati
  - E' triangolare (proprietà simmetrica) e priva della diagonale principale (proprietà riflessiva)
- Esempio

S1			
S2			
S3			
	S0	**S1**	**S2**

Riduzione del numero degli stati: tabella delle implicazioni (ii)

- Ogni elemento della tabella contiene:
  - Il simbolo di non equivalenza;
  - Il simbolo di equivalenza
    - gli stati corrispondenti sono equivalenti
  - Le coppie di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla equivalenza degli stati corrispondenti
- Sulla tabella così ottenuta si procede ad una analisi di tutte le coppie di stati.
- Esempio:

S1	x		
S2	x	~	
S3	S1,S2	x	x
	S0	**S1**	**S2**

Riduzione del numero degli stati: tabella delle implicazioni (iii)

- Analisi delle coppie di stati
  - Per ogni coppia di stati:
    - Una coppia marcata come equivalente non richiede alcuna ulteriore verifica
    - Se si trova un rimando ad un'altra coppia:
      1. Se questi stati **sono equivalenti** anche gli stati della coppia in esame **sono equivalenti**
      2. Se questi **non sono equivalenti** anche gli stati della coppia in esame **non sono equivalenti**
      - **Se gli stati della coppia cui si rimanda dipendono da una ulteriore coppia di stati si ripete il procedimento in modo iterativo fino a quando ci si riconduce ad uno dei due casi precedenti (ricordarsi la circolarità del vincolo)**
  - L'algoritmo termina quando non sono più possibili eliminazioni
  - Le coppie rimaste sono equivalenti

Riduzione del numero degli stati: *Esempio*

Tabella degli stati

	0	1
a	h/0	g/1
b	c/0	e/0
c	b/0	a/0
d	e/1	c/0
e	h/0	d/1
f	e/1	h/0
g	a/1	c/0
h	d/0	f/1

Tabella delle implicazioni

b	x						
c	x	ae					
d	x	x	x				
e	dg	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	ae	x	ae ch	
h	dh fg	x	x	x	dh df	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**

Riduzione del numero degli stati: *Esempio*

b	x						
c	x	**ae** ~					
d	x	x	x				
e	**dg** ~	x	x	x			
f	x	x	x	~~ch~~	x		
g	x	x	x	**ae** ~	x	~~ae ch~~	
h	~~dh fg~~	x	x	x	~~dh df~~	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**

Coppia d;f **d;f → c;h**
- ma c;h distinguibile: risultato **d;f distinguibile** (X)

Coppia f;g **f;g → a;e e f;g → c;h.**
- c;h è distinguibile: risultato **f;g distinguibile** (X)

Coppia a;h **a;h → d;h e a;h → f;g.**
- d;h è distinguibile: risultato **a;h distinguibile** (X)

Coppia e;h **e;h → d;h e e;h → d;f.**
- d;h è distinguibile: Risultato **e;h distinguibile** (X)

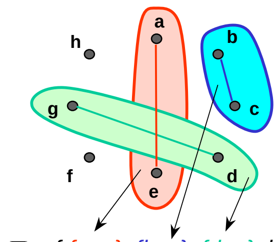
Coppia a;e **a;e → d;g ma d;g → a;e.**
- Quindi a;e → d;g → a;e: risultato **a~e** e **d~g**

Coppia d;g **d;g → a;e.**
- è indistinguibile **d~g** (passo 1)

Coppia b;c **b;c → a;e**
- poiché a~e (passo 1) anche **b~c**;

Riduzione del numero degli stati: costruzione della partizione di equivalenza e della macchina minima

- Le relazioni d'equivalenza sono rappresentabili su un grafo di equivalenza:
  - Vertice: rappresenta uno stato
  - Lato: due vertici sono uniti da un lato se e solo se sono equivalenti
- Le classi di equivalenza sono i sottografi completi del grafo (o *clique*):



$\Pi_e = \{ \{a, e\}, \{b, c\}, \{d, g\}, h, f \} =$
$= \{ \alpha, \beta, \delta, h, f \}$

	0	1
a	h/0	g/1
b	c/0	e/0
c	b/0	a/0
d	e/1	c/0
e	h/0	d/1
f	e/1	h/0
g	a/1	c/0
h	d/0	f/1

	0	1
α	h,0	δ,1
β	β,0	α,0
δ	α,1	β,0
f	α,1	h,0
h	δ,0	f,1

Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Diagramma degli stati

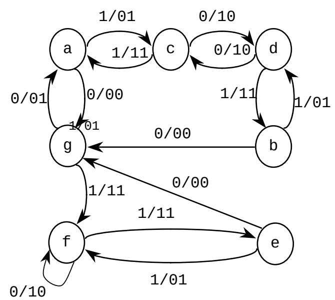


Tabella degli stati

	0	1
a	g/00	c/01
b	g/00	d/01
c	d/10	a/11
d	c/10	b/11
e	g/00	f/01
f	f/10	e/11
g	a/01	f/11

Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Tabella degli stati

	0	1
a	g/00	c/01
b	g/00	d/01
c	d/10	a/11
d	c/10	b/11
e	g/00	f/01
f	f/10	e/11
g	a/01	f/11

Tabella delle implicazioni

b	cd					
c	x	x				
d	x	x	ab			
e	cf	fd	x	x		
f	x	x	ae df	be cf	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Analisi della tabella delle implicazioni

b	cd					
c	x	x				
d	x	x	ab			
e	cf	fd	x	x		
f	x	x	ae df	be cf	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Coppia a;b **a;b → c;d ma c;d → a;b**

quindi a;b → c;d → a;b: risultato a~b e c~d

Coppia a;e

a;e → c;f ma c;f → a;e e c;f → d;f quindi

a;e → c;f → d;f ma d;f → b;e e d;f → c;f quindi

a;e → c;f → d;f → b;e ma b;e → d;f quindi

a;e → c;f → d;f → b;e quindi

a~e, c~f, d~f e b~e

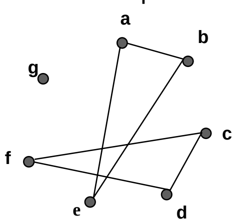
A questo punto, l'analisi delle altre coppie è già risolta

Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Tabella delle implicazioni

b	cd					
c	x	x				
d	x	x	ab			
e	cf	fd	x	x		
f	x	x	ae df	be cf	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Grafo di equivalenza



Partizione

$\Pi_e = \{ \{a, b, e\}, \{c, d, f\}, g \}$
$= \{ \alpha, \beta, g \}$

Tabella ridotta degli stati

	0	1
α	g/00	β/01
β	β/10	α/11
g	α/01	β/11

Sintesi: *Esempio 2*

- Sintetizzare una macchina di Moore secondo le specifiche:
  - La FSM ha due ingressi A e B
  - La FSM ha una uscita Z, che assume valore iniziale 1
  - Quando A=1, l'uscita assume il valore di B e tale specifica permane fino a quando si presenta la condizione A = B = Z = 1
  - Al presentarsi della condizione, il ruolo assunto da A e B viene scambiato
- Il primo passo consiste nel disegnare il diagramma delle transizioni e nel costruire la corrispondente tabella degli stati

Sintesi: *Esempio 2*

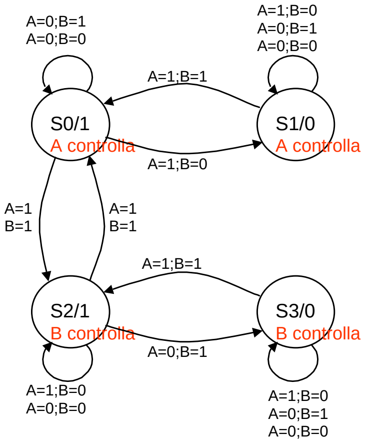


Tabella degli stati

	00	01	11	10	Z
S0	S0	S0	S2	S1	1
S1	S1	S1	S0	S1	0
S2	S2	S3	S0	S2	1
S3	S3	S3	S2	S3	0

Sintesi: *Esempio 2*

Tabella degli stati

	00	01	11	10	Z
S0	S0	S0	S2	S1	1
S1	S1	S1	S0	S1	0
S2	S2	S3	S0	S2	1
S3	S3	S3	S2	S3	0

Tabella delle implicazioni

S1	x		
S2	~~S0, S3 S1, S2~~	x	
S3	x	~~S2, S0~~	x
	S0	**S1**	**S2**

Riduzione del numero degli stati: *Esempio 3*

Tabella degli stati

	00	01	11	10
S1	S2/0	S8/1	S6/0	S3/0
S2	S7/0	S1/1	S5/1	S8/1
S3	S4/0	S8/1	S7/0	S5/0
S4	S6/0	S3/1	S1/1	S8/1
S5	S2/0	S8/1	S7/0	S1/0
S6	S1/1	S6/0	S3/1	S7/1
S7	S3/1	S6/0	S5/1	S7/1
S8	S1/1	S2/1	S8/1	S7/1

Tabella delle implicazioni

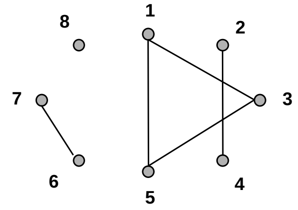
S2	x						
S3	S2,S4 S6,S7 S3,S5	x					
S4	x	S6,S7 S5,S1 S3,S1	x				
S5	S6,S7 S3,S1	x	S4,S2 S5,S1	x			
S6	x	x	x	x	x		
S7	x	x	x	x	x	S3,S1 S3,S5	
S8	x	x	x	x	x	x	x
	S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**

Riduzione del numero degli stati: *Esempio 3*

Tabella delle implicazioni

S2	x						
S3	S2,S4 S6,S7 S3,S5	x					
S4	x	S6,S7 S5,S1 S3,S1	x				
S5	S6,S7 S3,S1	x	S4,S2 S5,S1	x			
S6	x	x	x	x	x		
S7	x	x	x	x	x	S3,S1 S3,S5	
S8	x	x	x	x	x	x	x
	S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**

Grafo di equivalenza

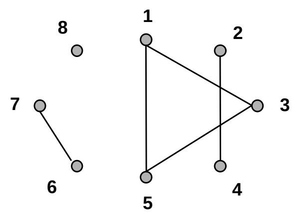


Partizione

Π_e= { {S1, S3, S5}, {S2, S4}, {S6, S7}, S8 } =
={ a, b, c, S8 }

Riduzione del numero degli stati: *Esempio 3*

Grafo di equivalenza



Partizione

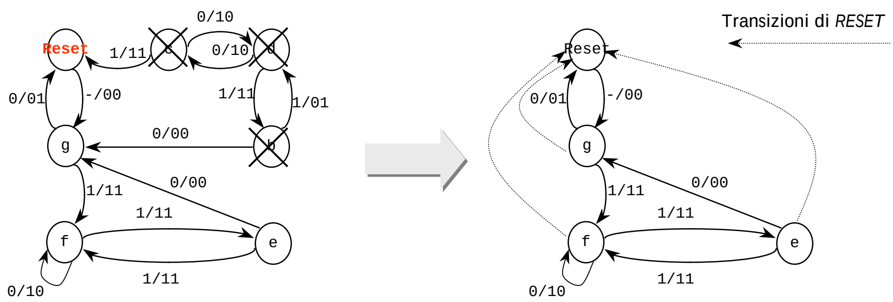
Π_e= { {S1, S3, S5}, {S2, S4}, {S6, S7}, S8 } =
={ a, b, c, S8 }

Tabella ridotta degli stati

	00	01	11	10
a	b/0	S8/1	c/0	a/0
b	c/0	a/1	a/1	S8/1
c	a/1	c/0	a/1	c/1
S8	a/1	b/1	S8/1	c/1

Riduzione del numero degli stati: eliminazione degli stati irraggiungibili

- Eliminazione degli stati irraggiungibili
  - Uno stato non è raggiungibile se non esiste alcuna sequenza di transizioni di stato che porti dallo stato RESET in tale stato.



Riduzione del numero degli stati: eliminazione degli stati irraggiungibili

- Eliminazione degli stati irraggiungibili
  - Un modo differente per ottenere lo stesso risultato, ma che utilizza la tabella degli stati, è il seguente:
    - A partire dallo stato di reset si indicano gli stati a cui rimanda.
    - Iterativamente, si svolge la stessa operazione per tutti gli stati successivi non indicando quelli che sono già presenti.
    - Quando non è più possibile identificare nuovi stati, il risultato è l'insieme degli **stati raggiungibili**.
  - Esempio:

	0	1
Reset	g/00	g/00
b	g/00	d/01
c	-/--	Reset/11
d	c/10	d/11
e	g/00	f/11
f	f/10	e/10
g	Reset/01	f/11

1:{Reset{g,g}}={Reset{g}}

2:{Reset{g{Reset,f}}}={Reset{g{f}}}

3:{Reset{g{f{f,e}}}}={Reset{g{f{e}}}}

4:{Reset{g{f{e{g,f}}}}}={Reset{g{f{e}}}}

Da cui si ricavano i soli stati raggiungibili: **Reset, g, f, e**. Gli altri possono essere eliminati dalla tabella