



Sintesi Sequenziale Sincrona

Sintesi comportamentale di reti sequenziali sincrone

Riduzione del numero degli stati per Macchine Completamente Specificate

Indistinguibilità & Equivalenza
Irraggiungibilità

versione del 12/12/2004



Sintesi

- La sintesi si svolge nei seguenti passi:
 1. Realizzazione del *diagramma degli stati* a partire dalle specifiche informali del problema
 2. Costruzione della *tabella degli stati*
 3. **Riduzione del numero degli stati:** *ottimizzazione*
 4. Costruzione della *tabella delle transizioni*
 - Assegnamento degli stati: *Codice & codifica*
 5. Costruzione della *tabella delle eccitazioni*
 - Scelta degli elementi di memoria
 6. Sintesi sia della rete combinatoria che realizza la funzione stato prossimo sia della rete combinatoria che realizza la funzione d'uscita

- 2 -



Riduzione del numero degli stati

- Il **numero minimo di elementi di memoria** (flip-flop) necessari a memorizzare tutti gli stati dell'insieme S è:

$$N_{FF,min} = \lceil \log_2 |S| \rceil$$

- Nel modello di una macchina a stati possono esistere stati ridondanti
- L'identificazione ed eliminazione di tali stati comporta:
 - Numero minore di elementi di memoria
 - Reti combinatorie meno costose
 - per **aumento dei gradi di libertà nella sintesi combinatoria**
 - condizioni di indifferenza dovute all'utilizzo parziale delle configurazioni che possono codificare lo stato
 - per **riduzione del numero di bit necessari per codificare gli stati**
 - Minore numero di ingressi e di uscite alle reti combinatorie che realizzano la funzione stato futuro e la funzione d'uscita.

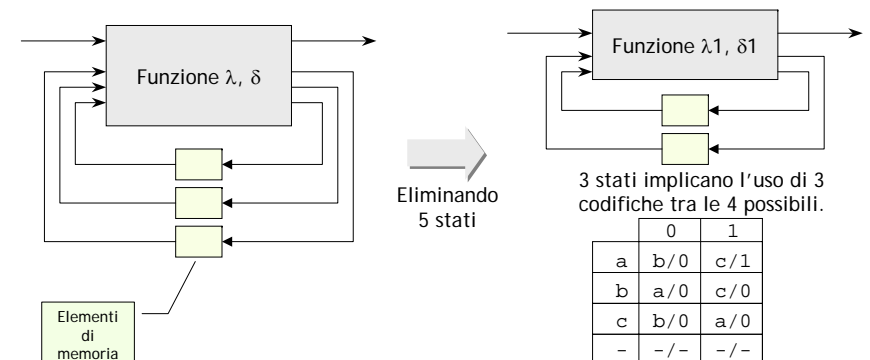
- 3 -



Riduzione del numero degli stati

- Esempio

Macchina con 8 stati, 1 ingresso ed 1 uscita Macchina con 3 stati, 1 ingresso ed 1 uscita



- 4 -



Riduzione del numero degli stati

- Lo scopo della riduzione del numero degli stati consiste nell'individuare la **macchina minima equivalente** a quella data
- La **macchina minima equivalente** è quella macchina:
 - Funzionalmente equivalente alla macchina data
 - Avente il minimo numero di stati
- Il problema della riduzione del numero di stati è distinto per macchine
 - **completamente specificate**: identificazione di stati **indistinguibili** o **equivalenti**
 - **non completamente specificate**: identificazione di stati **compatibili**
 - **macchina non completamente specificata**: se in corrispondenza di qualche coppia *{stato presente, configurazione di ingresso}* o il simbolo di uscita, o lo stato prossimo o entrambi non sono specificati
- Inoltre, deve essere prevista l'**eliminazione** degli stati **non raggiungibili dallo stato di reset, se questo è specificato**

- 5 -



Riduzione del numero degli stati: macchine equivalenti

- Date due macchine completamente specificate M1 e M2 queste si dicono **equivalenti** se e solo se:
 - per ogni stato s_i di M1, esiste uno stato s_j di M2 tale che ponendo la macchina M1 in s_i e la macchina M2 in s_j
 - e applicando alle due macchine una qualunque sequenza di ingresso I
 - le due sequenze di uscita sono identiche.
 - E viceversa per M2 rispetto ad M1
- **Nota**: nella **definizione di equivalenza** sono considerate solo le relazioni **ingresso-uscita** quindi le due macchine possono avere un insieme di stati diverso e in particolare di **diversa cardinalità**

- 6 -



Riduzione del numero degli stati: stati indistinguibili di una stessa macchina

- Data una macchina completamente specificata, siano:
 - I_α - una generica sequenza di ingresso i_j, \dots, i_k
 - U_α - la sequenza d'uscita ad essa associata ottenuta attraverso λ .
 - s_i, s_j - due generici stati
- I due stati s_i e s_j appartenenti ad S sono **indistinguibili** se:

$$U_{\alpha,i} = \lambda(s_i, I_\alpha) = \lambda(s_j, I_\alpha) = U_{\alpha,j} \quad \forall I_\alpha$$
 - ponendo la macchina in s_i oppure in s_j e applicando una qualsiasi sequenza di ingresso, le uscite sono identiche.
- L'indistinguibilità tra s_i e s_j si indica con: $s_i \sim s_j$

- 7 -



Riduzione del numero degli stati: stati equivalenti di una stessa macchina

- La relazione di **indistinguibilità** gode di tre proprietà:
 - **Riflessiva**: $s_i \sim s_i$
 - **Simmetrica**: $s_i \sim s_j \leftrightarrow s_j \sim s_i$
 - **Transitiva**: $s_i \sim s_j \wedge s_j \sim s_k \rightarrow s_i \sim s_k$
- Quindi, la relazione di indistinguibilità è una **relazione d'equivalenza**
 - Due stati indistinguibili sono equivalenti e possono essere sostituiti con un solo stato.
- In generale, un **gruppo di stati tra loro equivalenti** può essere raggruppato in unica **classe di equivalenza**
- L'**insieme delle classi di equivalenza** determina l'**insieme degli stati della macchina minima equivalente**

- 8 -



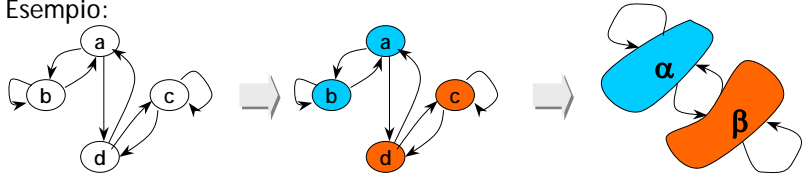
Riduzione del numero degli stati: partizione di equivalenza

- Formalmente, una *relazione di equivalenza* induce sull'insieme degli stati una *partizione Π_e di equivalenza* tale che
 - due stati appartengono alla stessa classe se e solo se sono equivalenti
 - due stati appartengono a classi diverse se e solo se non sono equivalenti
 - l'insieme S si dice partizionato nelle m classi C_1, \dots, C_m se:

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m = S$$

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i, j : i \neq j$$

- Il nuovo insieme degli stati è formato dalle classi della partizione
- Esempio:



- 9 -



Riduzione del numero degli stati: macchina minima

- Una macchina M è *minima* se *non esiste* nel suo insieme degli stati nessuna coppia di *stati equivalenti*
- Il problema della riduzione degli stati può quindi essere ricondotto a quello della "*costruzione*" di una *macchina equivalente minima a quella data*.
- Identificazione della macchina equivalente minima:
 - data una macchina M e la sua partizione di equivalenza indotta dall'indistinguibilità tra stati
 - la macchina M' il cui insieme degli stati è costituito dai blocchi della partizione di equivalenza è la macchina minima equivalente a quella data ed è unica
 - equivalente per costruzione
 - minima per costruzione
 - unica per le caratteristiche di equivalenza

- 10 -



Riduzione del numero degli stati: identificazione degli stati equivalenti

- La definizione di *indistinguibilità* tra stati è di difficile applicabilità poiché richiederebbe di considerare *tutte* le sequenze di ingresso (a priori infinite)
- Si ricorre ad una regola introdotta da *Paull - Unger*
 - Due stati s_i e s_j appartenenti ad S sono indistinguibili se e solo se per ogni simbolo di ingresso i_a :
 - $\lambda(s_i, i_a) = \lambda(s_j, i_a)$ (Le uscite sono uguali per ogni simbolo di ingresso)
 - $\delta(s_i, i_a) \sim \delta(s_j, i_a)$ (Gli stati prossimi sono indistinguibili)
- La *regola di Paull - Unger* è iterativa

- 11 -



Riduzione del numero degli stati: identificazione degli stati equivalenti (i)

- Applicando la regola di Paull - Unger agli stati di una macchina, si possono ottenere tre casi
- $s_i \not\sim s_j$
 - Se i simboli d'uscita sono diversi e/o
 - Se gli stati prossimi sono già stati verificati come distinguibili
 - $s_i \sim s_j$
 - Se i simboli di uscita sono uguali e
 - Se gli stati prossimi sono già stati verificati come indistinguibili
 - $s_i \sim s_j$ se $s_k \sim s_h$ (vincolo)
 - Se i simboli di uscita sono uguali e
 - Se gli stati prossimi non sono ancora stati verificati come indistinguibili

- 12 -



Riduzione del numero degli stati: identificazione degli stati equivalenti (ii)

- Poiché gli insiemi S ed \mathcal{I} hanno cardinalità finita, dopo un certo numero di passi i vincoli vengono risolti e ci si troverà in una delle due condizioni:

1. $s_i \not\sim s_j$

2. $s_i \sim s_j$

- L'analisi del caso 3. può portare a costruire dei vincoli nei quali è presente **circolarità del vincolo**: l'indistinguibilità di una coppia di stati è vincolata dall'indistinguibilità della stessa coppia di stati



Riduzione del numero degli stati: tabella delle implicazioni (i)

- Le relazioni di indistinguibilità o equivalenze possono essere identificate attraverso l'uso della **Tabella delle Implicazioni**
- La tabella ha le seguenti caratteristiche:
 - Mette in relazione ogni coppia di stati
 - E' triangolare (proprietà simmetrica) e priva della diagonale principale (proprietà riflessiva)
- Esempio

s1			
s2			
s3			
	s0	s1	s2



Riduzione del numero degli stati: tabella delle implicazioni (ii)

- Ogni elemento della tabella contiene:
 - Il simbolo di non equivalenza;
 - Il simbolo di equivalenza
 - gli stati corrispondenti sono equivalenti
 - Le coppie di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla equivalenza degli stati corrispondenti
- Sulla tabella così ottenuta si procede ad una **analisi di tutte le coppie di stati**.

- Esempio:

s1	x		
s2	x	~	
s3	s1, s2	x	x
	s0	s1	s2



Riduzione del numero degli stati: tabella delle implicazioni (iii)

- **Analisi delle coppie di stati**
 - Per ogni coppia di stati:
 - Una coppia marcata come equivalente non richiede alcuna ulteriore verifica
 - Se si trova un rimando ad un'altra coppia:
 1. Se questi stati **sono equivalenti** anche gli stati della coppia in esame **sono equivalenti**
 2. Se questi **non sono equivalenti** anche gli stati della coppia in esame **non sono equivalenti**
 - Se gli stati della coppia cui si rimanda dipendono da una ulteriore coppia di stati si ripete il procedimento in modo iterativo fino a quando ci si riconduce ad uno dei due casi precedenti (ricordarsi la circolarità del vincolo)
 - L'algoritmo termina quando non sono più possibili eliminazioni
 - Le coppie rimaste sono equivalenti



Riduzione del numero degli stati: *Esempio*

Tabella degli stati

	0	1
a	h/0	g/1
b	c/0	e/0
c	b/0	a/0
d	e/1	c/0
e	h/0	d/1
f	e/1	h/0
g	a/1	c/0
h	d/0	f/1



Tabella delle implicazioni

b	x							
c	x	ae						
d	x	x	x					
e	dg	x	x	x				
f	x	x	x	ch	x			
g	x	x	x	ae	x	ae	ch	
h	dh	fg	x	x	x	dh	df	x
	a	b	c	d	e	f	g	

- 17 -



Riduzione del numero degli stati: *Esempio*

b	x						
c	x	ae					
d	x	x	x				
e	dg	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	ae	x	ae	ch
h	dh	fg	x	x	x	dh	df
	a	b	c	d	e	f	g

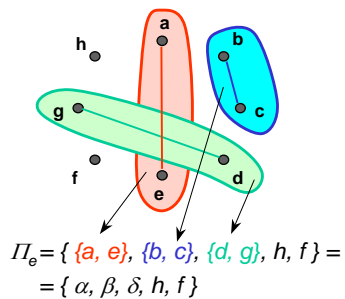
- Coppia d;f** d;f → c;h
 · ma c;h distinguibile: risultato **d;f distinguibile** (X)
- Coppia f;g** f;g → a;e e f;g → c;h.
 · c;h è distinguibile: risultato **f;g distinguibile** (X)
- Coppia a;h** a;h → d;h e a;h → f;g.
 · d;h è distinguibile: risultato **a;h distinguibile** (X)
- Coppia e;h** e;h → d;h e e;h → d;f.
 · d;h è distinguibile: Risultato **e;h distinguibile** (X)
- Coppia a;e** a;e → d;g ma d;g → a;e.
 · Quindi a;e → d;g → a;e: risultato **a-e e d-g**
- Coppia d;g** d;g → a;e.
 · è indistinguibile d-g (passo 1)
- Coppia b;c** b;c → a;e
 · poiché a-e (passo 1) anche **b-c**;

- 18 -



Riduzione del numero degli stati: *costruzione della partizione di equivalenza e della macchina minima*

- Le relazioni d'equivalenza sono rappresentabili su un grafo di equivalenza:
 - Vertice: rappresenta uno stato
 - Lato: due vertici sono uniti da un lato se e solo se sono equivalenti
- Le classi di equivalenza sono i **sottografi completi del grafo** (o *clique*):



	0	1
a	h/0	g/1
b	c/0	e/0
c	b/0	a/0
d	e/1	c/0
e	h/0	d/1
f	e/1	h/0
g	a/1	c/0
h	d/0	f/1

	0	1
α	h,0	δ ,1
β	β ,0	α ,0
δ	α ,1	β ,0
f	α ,1	h,0
h	δ ,0	f,1

- 19 -



Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Diagramma degli stati

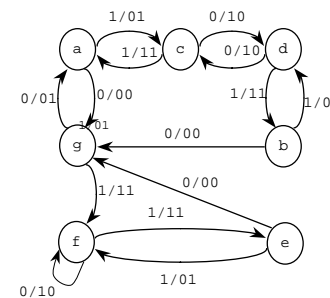


Tabella degli stati

	0	1
a	g/00	c/01
b	g/00	d/01
c	d/10	a/11
d	c/10	b/11
e	g/00	f/01
f	f/10	e/11
g	a/01	f/11

- 20 -



Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Tabella degli stati

	0	1
a	g/00	c/01
b	g/00	d/01
c	d/10	a/11
d	c/10	b/11
e	g/00	f/01
f	f/10	e/11
g	a/01	f/11



Tabella delle implicazioni

b	cd					
c	x	x				
d	x	x	ab			
e	cf	fd	x	x		
f	x	x	ae	be	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	b	c	d	e	f



Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Analisi della tabella delle implicazioni

b	cd					
c	x	x				
d	x	x	ab			
e	cf	fd	x	x		
f	x	x	ae	be	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	b	c	d	e	f



Coppia a;b a;b → c;d ma c;d → a;b
 quindi a;b → c;d → a;b: risultato a-b e c-d

Coppia a;e
 a;e → c;f ma c;f → a;e e c;f → d;f quindi
 a;e → c;f → d;f ma d;f → b;e e d;f → c;f
 quindi
 a;e → c;f → d;f → b;e ma b;e → d;f quindi
 a;e → c;f → d;f → b;e quindi
 a-e, c-f, d-f e b-e

A questo punto, l'analisi delle altre coppie è già risolta



Riduzione del numero degli stati: *Esempio 1*

Tabella delle implicazioni

b	cd					
c	x	x				
d	x	x	ab			
e	cf	fd	x	x		
f	x	x	ae	be	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	b	c	d	e	f



Grafo di equivalenza

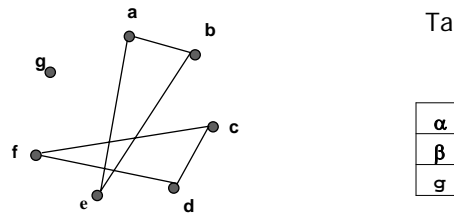


Tabella ridotta degli stati

	0	1
α	g/00	β/01
β	β/10	α/11
g	α/01	β/11

Partizione

$$\Pi_e = \{ \{a, b, e\}, \{c, d, f, g\} \}$$

$$= \{ \alpha, \beta, g \}$$



Sintesi: *Esempio 2*

- Sintetizzare una macchina di Moore secondo le specifiche:
 - La FSM ha due ingressi A e B
 - La FSM ha una uscita Z, che assume valore iniziale 1
 - Quando A=1, l'uscita assume il valore di B e tale specifica permane fino a quando si presenta la condizione A = B = Z = 1
 - Al presentarsi della condizione, il ruolo assunto da A e B viene scambiato
- Il primo passo consiste nel disegnare il diagramma delle transizioni e nel costruire la corrispondente tabella degli stati



Sintesi: Esempio 2

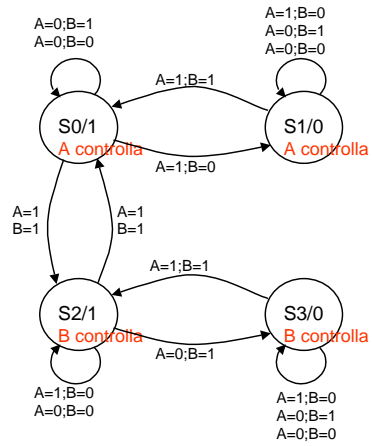


Tabella degli stati

	00	01	11	10	Z
S0	S0	S0	S2	S1	1
S1	S1	S1	S0	S1	0
S2	S2	S3	S0	S2	1
S3	S3	S3	S2	S3	0



Sintesi: Esempio 2

Tabella degli stati

	00	01	11	10	Z
S0	S0	S0	S2	S1	1
S1	S1	S1	S0	S1	0
S2	S2	S3	S0	S2	1
S3	S3	S3	S2	S3	0

Tabella delle implicazioni

S1	x		
S2	S0, S3 S2, S2	x	
S3	x	S2, S0	x
	S0	S1	S2



Riduzione del numero degli stati: Esempio 3

Tabella degli stati

	00	01	11	10
S1	S2/0	S8/1	S6/0	S3/0
S2	S7/0	S1/1	S5/1	S8/1
S3	S4/0	S8/1	S7/0	S5/0
S4	S6/0	S3/1	S1/1	S8/1
S5	S2/0	S8/1	S7/0	S1/0
S6	S1/1	S6/0	S3/1	S7/1
S7	S3/1	S6/0	S5/1	S7/1
S8	S1/1	S2/1	S8/1	S7/1

Tabella delle implicazioni

S2	x						
S3	S2, S4 S6, S7 S3, S5	x					
S4	x	S6, S7 S5, S1 S3, S1	x				
S5	S6, S7 S3, S1	x	S4, S2 S5, S1	x			
S6	x	x	x	x	x		
S7	x	x	x	x	x	S3, S1 S3, S5	
S8	x	x	x	x	x	x	
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7

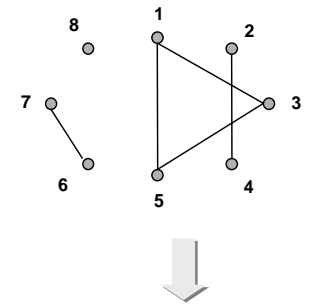


Riduzione del numero degli stati: Esempio 3

Tabella delle implicazioni

S2	x						
S3	S2, S4 S6, S7 S3, S5	x					
S4	x	S6, S7 S5, S1 S3, S1	x				
S5	S6, S7 S3, S1	x	S4, S2 S5, S1	x			
S6	x	x	x	x	x		
S7	x	x	x	x	x	S3, S1 S3, S5	
S8	x	x	x	x	x	x	
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7

Grafo di equivalenza



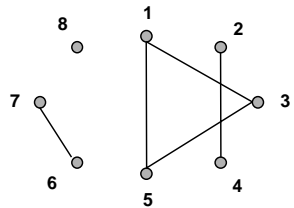
Partizione

$$\Pi_e = \{ \{S1, S3, S5\}, \{S2, S4\}, \{S6, S7\}, S8 \} = \{a, b, c, S8\}$$



Riduzione del numero degli stati: *Esempio 3*

Grafo di equivalenza



Partizione

$$\Pi_e = \{ \{S1, S3, S5\}, \{S2, S4\}, \{S6, S7\}, S8 \} = \{a, b, c, S8\}$$

Tabella ridotta degli stati

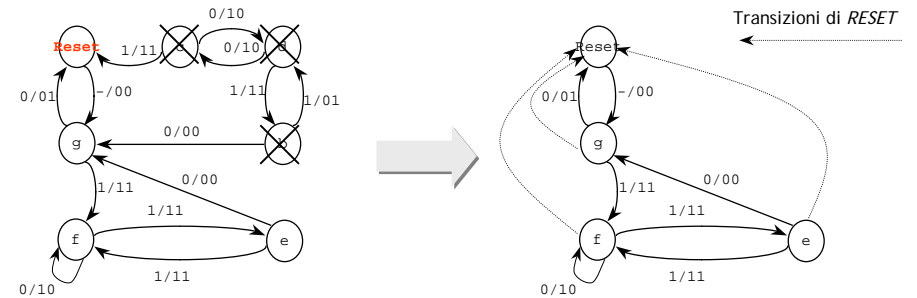
	00	01	11	10
a	b/0	S8/1	c/0	a/0
b	c/0	a/1	a/1	S8/1
c	a/1	c/0	a/1	c/1
S8	a/1	b/1	S8/1	c/1



Riduzione del numero degli stati: eliminazione degli stati irraggiungibili

Eliminazione degli stati irraggiungibili

- Uno stato non è raggiungibile se non esiste alcuna sequenza di transizioni di stato che porti dallo stato RESET in tale stato.



Riduzione del numero degli stati: eliminazione degli stati irraggiungibili

Eliminazione degli stati irraggiungibili

- Un modo differente per ottenere lo stesso risultato, ma che utilizza la tabella degli stati, è il seguente:
 - A partire dallo stato di reset si indicano gli stati a cui rimanda.
 - Iterativamente, si svolge la stessa operazione per tutti gli stati successivi non indicando quelli che sono già presenti.
 - Quando non è più possibile identificare nuovi stati, il risultato è l'insieme degli **stati raggiungibili**.

- Esempio:

	0	1
Reset	g/00	g/00
b	g/00	d/01
c	-/-	Reset/11
d	c/10	d/11
e	g/00	f/11
f	f/10	e/10
g	Reset/01	f/11

$$1: \{ \text{Reset} \{g, g\} \} = \{ \text{Reset} \{g\} \}$$

$$2: \{ \text{Reset} \{g \{ \text{Reset}, f \} \} \} = \{ \text{Reset} \{g \{ f \} \} \}$$

$$3: \{ \text{Reset} \{g \{ f \{ f, e \} \} \} \} = \{ \text{Reset} \{g \{ f \{ e \} \} \} \}$$

$$4: \{ \text{Reset} \{g \{ f \{ e \{ g, f \} \} \} \} \} = \{ \text{Reset} \{g \{ f \{ e \} \} \} \}$$

Da cui si ricavano i soli stati raggiungibili: **Reset, g, f, e**. Gli altri possono essere eliminati dalla tabella