



## Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo di Quine-McCluskey

Metodo di Quine-McCluskey per più funzioni



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita

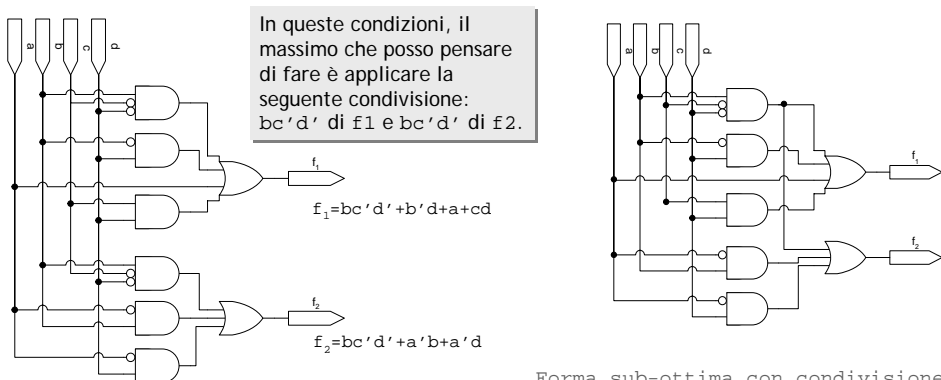
- Nel caso di funzioni a più uscite una prima soluzione consiste nel minimizzare le funzioni singolarmente.
- Il risultato ottenuto potrebbe risultare non ottimale se si considera che le funzioni potrebbero condividere degli implicanti riducendo il costo.
- Gli **implicanti** che possono essere **condivisi non sono necessariamente primi per le funzioni prese singolarmente**
  - Se prese singolarmente, le forme ottenute per le funzioni possono non essere minime
- Gli implicanti che possono essere condivisi sono **implicanti primi di più funzioni**.
- Come si ottengono gli **implicanti primi di più funzioni**?

- 2 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cifra di merito=cardinalità):



Ottimizzazione indipendente delle due funzioni:  
cardinalità copertura=7

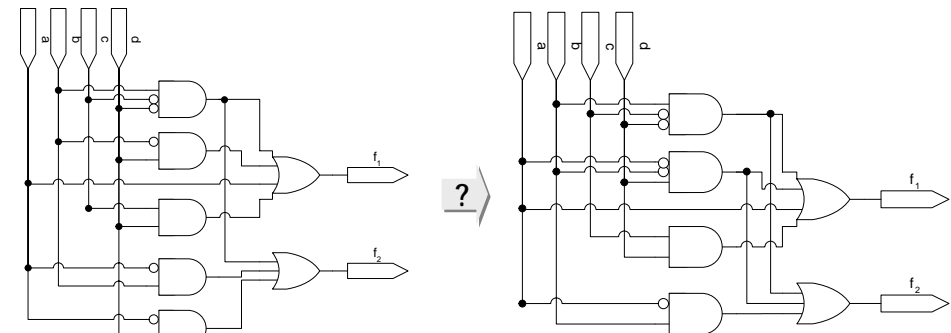
Forma sub-ottima con condivisione:  
cardinalità copertura=6

- 3 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cifra di merito=cardinalità):



Nota: il vincolo dei due livelli deve permanere

Forma sub-ottima con condivisione

Forma ottima con condivisione:  
cardinalità copertura =5

- 4 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita

### □ Esempio (cont.) (cifra di merito=cardinalità):

- Giustificazione del risultato

Senza condivisione      Con condivisione

a,b	00	01	11	10	
c,d	00	0	1	1	1
f <sub>1</sub>	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	1

→

a,b	00	01	11	10	
c,d	00	0	1	1	0
f <sub>2</sub>	01	1	1	0	0
	11	1	1	0	0
	10	0	1	0	0

Nota: Gli implicanti condivisi non sono tutti primi per f<sub>1</sub> e f<sub>2</sub> prese singolarmente

- 5 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita

### □ Esempio (cont.) (cifra di merito=cardinalità):

- Giustificazione del risultato

a,b	00	01	11	10	
c,d	00	0	1	1	1
f <sub>1</sub>	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	1

→

a,b	00	01	11	10	
c,d	00	0	1	1	0
f <sub>1</sub> ·f <sub>2</sub>	01	1	0	0	0
	11	1	1	0	0
	10	0	0	0	0

Nota: gli implicanti primi di f<sub>1</sub>·f<sub>2</sub> che conviene utilizzare sono solo 2. La scelta è un problema legato alla copertura ottima delle funzioni.

Non viene utilizzato nella soluzione ottima perché i suoi "1" risultano già coperti (con cardinalità inferiore a quella generata dal suo utilizzo)

- 6 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- In generale, oltre agli implicanti primi delle singole funzioni è necessario considerare anche tutti gli implicanti ottenuti combinando in tutti i modi possibile le funzioni da minimizzare.
  - Il numero delle combinazioni possibili con N funzioni è  $2^N - 1$ .
  - Ad esempio, con tre funzioni le combinazioni possibili sono: f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>, f<sub>3</sub>, f<sub>1</sub>·f<sub>2</sub>, f<sub>1</sub>·f<sub>3</sub>, f<sub>2</sub>·f<sub>3</sub>, f<sub>1</sub>·f<sub>2</sub>·f<sub>3</sub>
- Si osservi che il metodo analizzato potrebbe essere applicato anche alle *mappe di Karnaugh*. Comunque, tale metodo è limitato sia dal numero delle variabili sia dalla quantità di tabelle da realizzare.
  - Ad esempio, 10 funzioni implicherebbero la realizzazione di 1023 tabelle.
- Il metodo di Quine-McCluskey collassa tutte le informazioni in una unica tabella.
  - Il numero degli implicanti primi estratti mantiene il problema di copertura della stessa complessità di quello delle due funzioni.

- 7 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

- L'applicazione del metodo a più funzioni *completamente specificate* richiede estensioni alla costruzione della tabella degli implicanti ed alla soluzione della tabella di copertura

### - Costruzione della tabella degli implicanti

- si procede come per il caso scalare con la differenza che si associa ad ogni *mintermine* un ulteriore "identificatore" (*maschera di appartenenza*) costituito da tanti bit quante sono le funzioni considerate
- l'identificatore consente di individuare a quale funzione/i appartiene il mintermine. Quindi, un bit dell'identificatore assume valore 1 se e solo se la funzione che ad esso corrisponde contiene nell'ONset tale mintermine; 0 in caso contrario (mintermine dell'OFFset).

- 8 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

- Nel caso di funzioni *non completamente specificate* il problema richiede un'ulteriore trasformazione che riporta al caso multi-uscita completamente specificato:
  - I mintermini della funzione contenuti nel DCset sono aggiunti all' ONset
  - Le condizioni di indifferenza aumentano i gradi di libertà nella generazione degli implicanti primi



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

- Esempio1:  $F = |f_1 f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$

Mappa di Karnaugh di  $f_1$

a, b		c, d			
		00	01	11	10
00	01	1	-	1	0
01	11	0	-	1	0
11	10	0	0	0	0
10		1	0	0	0

Mappa di Karnaugh di  $f_2$

a, b		c, d			
		00	01	11	10
00	01	0	1	0	0
01	11	1	-	1	0
11	10	0	0	0	-
10		0	0	0	0



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

- Esempio1 (cont.):  $F = |f_1 f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$ 
  - Costruzione identificatore senza DCset:

0000	0	10
<hr/>		
0001	1	01
0010	2	10
0100	4	01
<hr/>		
1100	12	10
<hr/>		
1101	13	11



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

- Esempio1 (cont.):  $F = |f_1 f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$ 
  - Aggiunta mintermini del DCset all'ONset:

0000	0	10
<hr/>		
0001	1	01
0010	2	10
0100	4	11
<hr/>		
0101	5	11
1100	12	10
<hr/>		
1011	11	01
1101	13	11



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

### Generazione di implicanti primi

- La generazione dell'implicante segue le stesse modalità viste per il caso scalare.
- L'identificatore delle funzioni di ogni nuovo implicante viene ottenuto come AND bit a bit dei due indicatori.
  - **Nota:** se l'indicatore ottenuto è 00...0 il nuovo implicante non è una espansione valida (cioè non appartiene a nessuna funzione) e non viene riportato.
- Viene *marcata*, ossia coperta da un implicante di livello superiore, quella **configurazione il cui indicatore è uguale al risultato dell'AND** eseguito (l'implicante di livello superiore copre quello di livello inferiore per le stesse funzioni).

Ad esempio, se consideriamo i due mintermini

• 011 3 101 e 001 1 011 si ottiene l'implicante 0-1 1,3 001

• e nessun mintermine viene marcato come coperto.



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

### Quattro casi possibili - esempi:

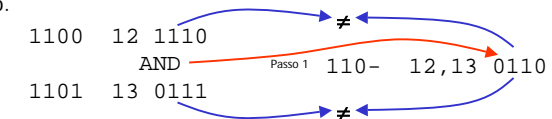
#### 1. L'identificatore di appartenenza risultante è 000...000

- La configurazione ottenuta non corrisponde a nessuna espansione valida poiché non appartiene a nessuna delle funzioni.



#### 2. L'identificatore di appartenenza risultante non coincide con nessun identificatore di partenza

- La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida ma non coinvolge tutte le funzioni né del primo né del secondo implicante coinvolto.



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

### Quattro casi possibili:

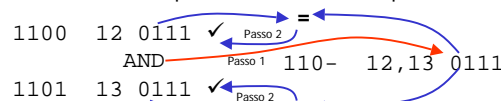
#### 3. L'identificatore di appartenenza risultante coincide con un solo identificatore di partenza

- La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida che coinvolge tutte le funzioni di un solo implicante coinvolto.



#### 4. L'identificatore di appartenenza risultante coincide con entrambi gli identificatori di partenza.

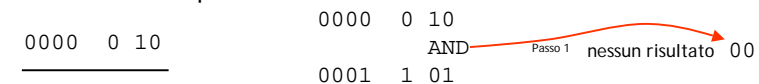
- La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida e coinvolge tutte le funzioni del primo e del secondo implicante coinvolto.



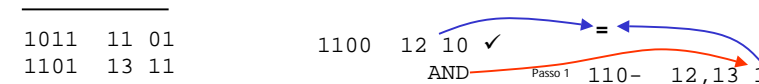
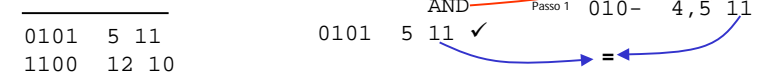
## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

### Esempio1 (cont.): $F = |F_1 F_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$

#### alcune espansioni:



Nota:  
implicante di  
più funzioni





## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

□ Esempio1 (cont.):  $F = |f_1 f_2| = |DN_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$

0000 0 10 ✓		
0001 1 01 ✓	→	000- 0,1 00
0010 2 10 ✓		00-0 0,2 10
0100 4 11 ✓		0-00 0,4 10
0101 5 11 ✓	→	0-01 1,5 01
1100 12 10 ✓		010- 4,5 11
1011 11 01		-100 4,12 10 ✓
1101 13 11 ✓		-101 5,13 11
		110- 12,13 10 ✓

- 17 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Implicanti primi

- Nel caso di funzioni *completamente specificate* gli implicanti non marcati sono **implicanti primi**
- Nel caso di funzioni *non completamente specificate* l'elenco degli implicanti ottenuti subisce un'ulteriore trasformazione:
  - Tutti gli implicanti che coprono solo mintermini del DCset non sono implicanti primi e vanno rimossi dall'insieme degli implicanti non marcati
    - Es 1 (cont.)
      - L'implicante 1011 che copre solo il mintermine 11 della funzione  $f_2$  non è implicante primo perché copre solo mintermini del DCset di  $f_2$
  - Tutti gli implicanti rimasti sono **implicanti primi**

- 18 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura

### □ Tabella di Copertura

- la tabella di copertura è ottenuta includendo gli implicanti primi e la giustapposizione dei mintermini del ONset di tutte le funzioni.

Esempio1 (Cont.):  $F = |f_1 f_2| = |DN_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$

P1: 00-0 10 0,2		
P2: 0-00 10 0,4		
P3: 0-01 01 1,5		
P4: 010- 11 4,5		
P5: -101 11 5,13		
P6: -10- 10 4,5,12,13	→	

	f1				f2		
	0	2	12	13	1	4	13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P3					x		
P4						x	
P5			x				x

- 19 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura

- **Identificazione della copertura ottima:** simile al caso di singola uscita con alcune differenze.

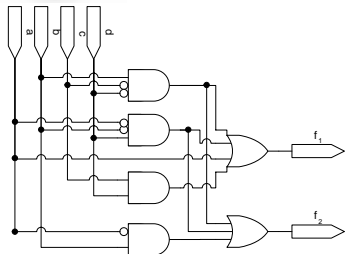
### Costi

- è necessario inserire la **colonna costo** anche se questo viene considerato identico per ogni implicante (cifra di merito=cardinalità)
- quando un termine prodotto **viene scelto per la prima volta** e inserito nella copertura di una o più funzioni, il suo **costo** viene **modificato**
  - portato a **0** nel caso in cui la cifra di merito sia la **cardinalità** degli implicanti
  - portato a **+1** nel caso in cui la cifra di merito sia il numero dei **letterali**
- La modifica del costo serve a tener conto delle possibili condivisioni degli implicanti

- 20 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Costo



In questo esempio la soluzione è ottenuta per essenzialità e per dominanza di riga ed è identica sia minimizzando la cardinalità sia i letterali

$$f_1 = \underline{bc'd'} + \underline{a'b'd} + \underline{a} + \underline{cd}$$

$$f_2 = \underline{bc'd'} + \underline{a'b'd} + \underline{a'b}$$

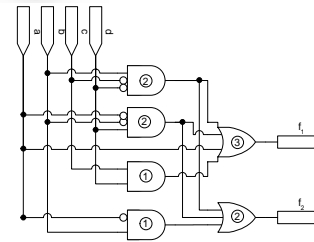
Cardinalità = 5

Numero porte ANDOR = n° tot. impl. - n° impl. con un solo letterale + n° uscite  
Numero porte ANDOR = 5 - 1 + 2 = 6

Mettere 0 il costo quando un implicante viene preso significa considerare che il costo sia indipendente dal numero degli ingressi delle porte



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Costo



$$P_0 = bc'd'$$

$$P_1 = a'b'd$$

$$P_2 = a$$

$$P_3 = cd$$

$$P_4 = a'b$$

*Espressioni che descrivono la soluzione*

$$f_1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = P_0 + P_1 + a + cd$$

$$f_2 = P_0 + P_1 + P_4 = P_0 + P_1 + a'b$$

$$\left. \begin{array}{l} P_0 = bc'd' \\ P_1 = a'b'd \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Implicanti} \\ \text{condivisi} \end{array}$$

Numero totale letterali della soluzione = 15

Numero totale porte ANDOR(2in) = Letterali soluzione - n° implicanti condivisi - n° uscite

Numero totale porte ANDOR(2in) = 15 - 2 - 2 = 11

Mettere +1 il costo quando un implicante viene preso significa tener conto della condivisione



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura

□ Identificazione della copertura ottima: simile al caso di singola uscita con alcune differenze.

- **Essenzialità:**

- se l'implicante in oggetto è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte la riga viene eliminata (scelta dell'implicante) così come tutte le colonne coperte

- se l'implicante in oggetto **non** è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte (una o più funzioni hanno tale l'implicante non essenziale), la riga viene mantenuta e viene scelto tale implicante per le funzioni per cui è essenziale; in queste ultime vengono eliminate le colonne coperte

- viene aggiornato il costo dell'implicante



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura

□ Identificazione della copertura ottima: simile al caso di singola uscita con alcune differenze.

- **Dominanza di riga**

- Si guarda l'intera riga. Come per il caso di funzioni ad una sola uscita.

- **Dominanza di colonna**

- La dominanza di colonna ha validità solo all'interno di una funzione. Una colonna della funzione  $f_i$  non può coprire né essere coperta da una colonna presente nella funzione  $f_k$ .



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura

□ Esempio 1 (cont.):

	0	2	12	13	1	4	13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P0							
P3					x		
P4						x	
P5				x			x

Nota:  
nella scelta di P5 a causa della sua essenzialità in f2 per 13, la riga eliminata è solo quella in corrispondenza di f2 poiché P5 non è essenziale per f1.

Le espressioni Booleane sono

$$f1 = P1 + P6$$

$$f2 = P3 + P4 + P5$$

Si osservi che non ci sono termini comuni.



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Cardinalità

□ Esempio di copertura completo con cifra di merito=cardinalità:

	f1										f2						f3									
	2	3	5	7	8	9	10	11	13	15	2	3	5	6	7	10	11	14	15	6	7	8	9	13	14	15
P0						x			x	x	x															
P1			x	x						x	x															
P2						x	x	x	x																	
P3												x	x		x	x	x	x	x	x						
P4			x		x				x		x					x		x	x		x					
P5	x	x						x	x			x	x			x	x									
P6				x	x									x		x										
P7										x	x															
P8							x			x																
P9						x	x																			
P10															x	x		x	x		x	x				
P11			x							x						x					x					

Identificazione ed estrazione degli essenziali

$$f1: \{P5\}$$

$$f2: \{P6\}$$

$$f3: \{P9; P10\}$$



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Cardinalità

□ Esempio di copertura completo con costo identico per tutti gli implicanti (a)

C	f1						f2						f3			
	5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13		
1 P0					x	x	x									
1 P1	x	x				x	x									
1 P2			x	x												
1 P3							x	x	x	x	x	x	x	x		
1 P4			x				x	x	x	x	x	x	x	x		
0 P5						x										
0 P6	x	x														
1 P7						x	x									x
1 P8					x	x										x
0 P9				x	x											
0 P10									x				x	x		
1 P11			x				x							x		

dominanza di riga

Soluzione parziale

$$f1: \{P5\}$$

$$f2: \{P6\}$$

$$f3: \{P9; P10\}$$



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Cardinalità

□ (b)

C	f1						f2						f3			
	5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13		
1 P0					x	x	x									
1 P1	x	x				x	x									
1 P3							x	x	x	x	x	x	x	x		
1 P4			x				x	x	x	x	x	x	x	x		
0 P5						x										
0 P6	x	x														
1 P7						x	x									x
1 P8					x	x										x
0 P9				x	x											
0 P10									x				x	x		

dominanza di colonna

Soluzione parziale

$$f1: \{P5\}$$

$$f2: \{P6\}$$

$$f3: \{P9; P10\}$$



Quine-McCluskey:  
Multi-Uscita - Tabella di copertura - Cardinalità

□ (c)

c	f1				f2		f3
	5	8	13	15	2	6	13
1 P0			x	x			
1 P1	x		x	x			
1 P3					x	x	
1 P4				x			
0 P5					x		
0 P6	x						
1 P7			x	x			x
1 P8			x	x			x
0 P9	x						
0 P10					x		

righe essenziali secondarie e dominanza di riga

Soluzione parziale  
f1: {P5, P9}  
f2: {P6}  
f3: {P9, P10}



Quine-McCluskey:  
Multi-Uscita - Tabella di copertura - Cardinalità

□ (d)

c	f1			f2		f3
	5	13	15	2	6	13
1 P1	x	x	x			
1 P3				x	x	
1 P4			x			
0 P5				x		
0 P6	x					
0 P7		x	x			x
0 P10					x	

Righe essenziali secondarie e dominanza di riga

Soluzione parziale  
f1: {P5, P9}  
f2: {P6}  
f3: {P9, P10, P7}



Quine-McCluskey:  
Multi-Uscita - Tabella di copertura - Cardinalità

□ (e)

c	f1			f2	
	5	13	15	2	6
1 P1	x	x	x		
1 P3				x	x
0 P5				x	
0 P6	x				
0 P7		x	x		
0 P10					x

dominanza di colonna

Soluzione parziale  
f1: {P5, P9}  
f2: {P6}  
f3: {P9, P10, P7}



Quine-McCluskey:  
Multi-Uscita - Tabella di copertura - Cardinalità

□ (f)

c	f1		f2	
	5	13	2	6
1 P1	x	x		
1 P3			x	x
0 P5			x	
0 P6	x			
0 P7		x		
0 P10				x

Tabella ciclica  
scelta dei rimanenti implicanti per completare la copertura  
f1: per coprire 5 e 13 posso scegliere P1 (costo 1) oppure P6 e P7 (costo 0). Si sceglie P6 e P7  
f2: per coprire 2 e 6 posso scegliere P3 (costo 1) oppure P5 e P10 (costo 0). Si sceglie P5 e P10

Espressioni Booleane che descrivono la soluzione

f1 = P5 + P9 + P6 + P7  
f2 = P6 + P5 + P10  
f3 = P9 + P10 + P7  
P5 = ...  
P9 = ..  
P6 = ..  
P7 = ...  
P10 = ...

Implicanti condivisi

Soluzione finale

f1: {P5, P9, P6, P7}  
f2: {P6, P5, P10}  
f3: {P9, P10, P7}

Cardinalità della copertura = 5

(Letterali della soluzione = 24)





## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Letterali

□ Esempio di copertura completo con cifra di merito= Letterali:

	f1					f2					f3					C											
	2	3	5	7	8	9	10	11	13	15	2	3	5	6	7	10	11	14	15	6	7	8	9	13	14	15	C
P0						x		x	x	x																2	
P1			x	x					x	x																	2
P2					x	x	x	x																			2
P3											x	x	x	x	x	x	x	x									1
P4		x	x					x	x						x	x											2
P5	x	x							x	x					x	x											2
P6			x	x							x	x															3
P7																							x	x			3
P8							x	x															x	x			3
P9						x	x																x	x			3
P10														x	x							x	x		x	x	2
P11			x												x							x				x	3

Identificazione ed estrazione degli essenziali

f1: {P5}  
f2: {P6}  
f3: {P9;P10}

- 33 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Letterali

□ Esempio cont.

	f1					f2					f3					C
	5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13	C	
P0				x	x	x									2	
P1	x	x													2	
P2			x	x											2	
P3							x	x	x	x	x	x			1	
P4		x													2	
P5	x	x													2 -> 1	
P6	x	x					x	x							3 -> 1	
P7															3	
P8							x	x							3	
P9				x	x										3 -> 1	
P10															2 -> 1	
P11			x												3	

Identificazione delle dominanze di colonna:

F1 : 7 domina 5 ; 9 domina 8 ;  
F2 : 3 domina 2 ; 11 domina 10 ; 14 domina 15;

- 34 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Letterali

□ Esempio cont.

	f1				f2				f3		C
	5	8	13	15	2	6	10	14	13	C	
P0			x	x						2	
P1	x		x	x						2	
P2			x							2	
P3					x	x	x	x		1	
P4				x						2	
P5					x		x			1	
P6	x									1	
P7			x	x					x	3	
P8				x					x	3	
P9			x							1	
P10					x		x			1	
P11				x						3	

Identificazione delle dominanze di riga:

P1 domina P0 ; P9 domina P2 ; P7 domina P8 ; P3 domina P5 ; P3 domina P10;  
P1 domina P4 ; P1 domina P11;

- 35 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Letterali

□ Esempio cont.

	f1				f2				f3		C
	5	8	13	15	2	6	10	14	13	C	
P1	x		x	x						2	
P3					x	x	x	x		1	
P6	x									1	
P7			x	x					x	3	
P9			x							1	

Identificazione e scelta delle essenzialità:

f1: {P5, P9}  
f2: {P6, P3}  
f3: {P9, P10, P7}

- 36 -



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Letterali

### □ Esempio cont

	f1			C
	5	13	15	
P1	x	x	x	2
P6	x			1
P7		x	x	3 → 1

Identificazione delle dominanze di colonna:  
F1 : 13 domina 15 ;

	f1		C
	5	13	
P1	x	x	2
P6	x		1
P7		x	1

Non sono più applicabili le riduzioni per essenzialità e per dominanza. Va risolta la tabella ciclica ad esempio con un *B&B*



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabella di copertura - Letterali

	f1			C
	5	13	15	
P1	x	x	x	2
P6	x			1
P7		x	x	1

Le due soluzioni possibili per il completamento della copertura di f1 sono l'utilizzo di P1 oppure l'utilizzo di P6 e P7. Calcoliamo il costo delle due soluzioni per scegliere l'ottimo.

### Soluzione 1

$$\begin{aligned} f1 &= P5 + P9 + P1 \\ f2 &= P6 + P3 \\ f3 &= P9 + P10 + P7 \end{aligned}$$

Implicanti condivisi  
P9 = ..

Costo in letterali = 18  
(cardinalità = 7)

### Soluzione 2

$$\begin{aligned} f1 &= P5 + P9 + P6 + P7 \\ f2 &= P6 + P3 \\ f3 &= P9 + P10 + P7 \end{aligned}$$

Implicanti condivisi  
P9 = ..  
P6 = ..  
P7 = ..

Costo in letterali = 20  
(cardinalità = 6)



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabelle Cicliche

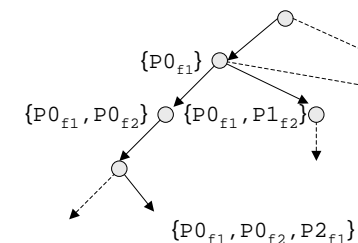
- È possibile applicare il *B&B* con alcuni accorgimenti.
  - Un implicante può essere usato per coprire mintermini di funzioni differenti.
  - L'aumento della complessità è notevole a causa dell'aumento dei gradi di libertà
    - lo stesso implicante può comparire più volte nell'albero di copertura di *B&B*.



## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Tabelle Cicliche

### □ Esempio

	f1					f2				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
P0	x	x				x	x			
P1		x	x	x			x	x		
P2			x	x		x		x	x	
P3	x		x	x		x				x
P4	x	x	x			x	x			





## Quine-McCluskey: Multi-Uscita - Criteri di costo

---

- Differenti criteri di costo implicano
  - Differenti **complessità** di elaborazione
    - Usare come costo i letterali comporta una soluzione più complessa
  - Differenti **stime** del costo del circuito
    - Considerare solo la cardinalità non tiene in conto il costo reale delle porte logiche
- Aumentare la complessità algoritmica per una stima migliore potrebbe essere assolutamente inutile se si considera che il collegamento alla libreria tecnologica (*library binding*) cambia la struttura del circuito e, come conseguenza, il costo della realizzazione.
  - In media, due soluzioni che differiscono nel costo stimato del 10%-20% sono da considerarsi equivalenti.



## Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Espresso-Exact

---

- Espresso-Exact
  - Algoritmo implementato in *Espresso* per la minimizzazione esatta.
  - I principi su cui si basa sono gli stessi della procedura di Quine-McCluskey (algoritmi utilizzati sono un po' diversi).
  - In Espresso-exact gli implicanti sono partizionati in tre insiemi:
    - Essenziali.
    - Totalmente ridondanti: sono quelli coperti da implicanti essenziali e dal DC-set.
    - Parzialmente ridondanti: i rimanenti. Questo ultimo insieme è l'unico ad essere coinvolto nella fase di copertura.
  - Una tabella di copertura ridotta è ottenuta ponendo come indici di riga i soli implicanti parzialmente ridondanti. Gli indici di colonna sono in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei mintermini.
  - La tabella è più compatta rispetto a quella ottenuta con Quine-McCluskey e non ha colonne essenziali.