



Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a 2 Livelli: Metodo di Quine-McCluskey

Ottimizzazione e cifre di merito

Introduzione al Metodo di Quine-McCluskey

Metodo di Quine-McCluskey per una funzione completamente specificata

Metodo di Quine-McCluskey per una funzione non completamente specificata



Sintesi di reti combinatorie a due livelli

Obiettivo della sintesi: ottimizzazione della rete combinatoria

- Minimizzazione dei **costi**
- Massimizzazione delle **prestazioni**
- **Costi: area di silicio**
 - dipende dalla **libreria di componenti** utilizzata nella realizzazione e dalla tecnologia implementativa dei componenti (*library binding* o mapping tecnologico)
 - standard cell
 - semi-custom (gate array: matrice di porte logiche per le quali è possibile fissare la struttura di interconnessione in fase di progettazione)
 - componenti programmabili (CPLD, FPGA) con funzionalità ridefinibile anche in funzionamento
- **Prestazioni:**
 - **ritardo di propagazione** (o latenza): tempo intercorso tra la presentazione degli ingressi e la generazione di un valore **valido** in uscita
 - **throughput**: tempo necessario tra la presentazione di un set di ingressi e il set successivo (uguale o inferiore alla latenza)

- 2 -



Stima di costi e prestazioni

- L'unica valutazione esatta possibile è quella di portare la fase di sintesi fino alla realizzazione circuitale: impraticabile perché troppo complessa.
- Nella ricerca di una soluzione ottima o ottimale è necessario poter **stimare i costi e le prestazioni**:
 - al più alto livello possibile di astrazione per decidere se proseguire o interrompere la ricerca dell'ottimalità
 - tramite **cifre di merito** che rappresentino **stime indipendenti** dalla tecnologia implementativa
 - con un "basso costo" di stima:
 - il calcolo dei valori stimati deve essere rapido (poco complesso)
 - stimatori a "grana grossa" suscettibili di raffinamenti

- 3 -



Area: cifre di merito (1)

Area di componenti e di collegamenti

- **Area porte logiche**
 - ad ogni porta è possibile associare un costo (funzione della tecnologia e del n° di ingressi per porta), se è nota la libreria
- **Area collegamenti (wiring)**
 - non definibile se non a implementazione effettuata. In generale, viene considerata proporzionale a quella delle porte

- 4 -



Area: cifre di merito (2)

- **N° di letterali** presenti nella rappresentazione **fattorizzata** della funzione
 - è una delle cifre di merito adottate comunemente per la stima dell'area ed è indipendente dalla libreria tecnologica
 - motivazione: l'ampiezza di una cella che contiene un gate virtuale è proporzionale agli "strati" di silicio che, a loro volta, sono proporzionali al n° di letterali (n° di ingressi al gate)
- **Cardinalità** della soluzione in rappresentazioni della funzione di tipo SoP o PoS
 - Misura la complessità della soluzione e dà indicazione del n° di porte logiche necessarie
 - Il n° di porte logiche è una stima dell'area indipendente dalla tecnologia

Sono i due **criteri di costo** utilizzati nell'ottimizzazione di reti a 2 livelli



Rappresentazione fattorizzata

- La **rappresentazione fattorizzata** di una funzione logica può essere costituita da:
 - un letterale
 - una somma di forme fattorizzate
 - un prodotto di forme fattorizzate
- cioè: da una qualsiasi espressione algebrica con parentesi, con l'unico vincolo che l'operazione di complementazione sia applicata **solo** a singole variabili
 - le ottimizzazioni delle forme canoniche (SOP e POS) mantengono fattorizzate le espressioni



Ritardo di propagazione: cifre di merito

- **Ritardo di propagazione del percorso critico**, cioè del percorso più lungo che collega gli ingressi con l'uscita.
 - la valutazione esatta è possibile ed è funzione del fanout della porta che è noto se è nota la libreria di componenti
- **ritardo di propagazione attraverso le porte logiche** (in generale, nodi del circuito)
 - la valutazione esatta è possibile ed è funzione del fanout della porta che è noto se è nota la libreria di componenti
- **ritardo di propagazione nei segmenti di interconnessione**
 - è valutabile solo a implementazione effettuata: trascurato
- **ritardo di propagazione = $\tau \times N^\circ$ di porte che costituiscono il percorso critico**, con numero di ingressi per porta costante e τ = ritardo di propagazione in una porta AND o OR con quegli ingressi
 - è la cifra di merito adottata comunemente per la stima del ritardo di propagazione ed è indipendente dalla libreria tecnologica
 - è ricavabile direttamente dall'espressione logica



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi esatti - Quine-McCluskey*

- È un metodo di **minimizzazione tabellare** (automatizzato in strumenti CAD)
 - facile da tradurre in un algoritmo.
 - il numero di variabili trattate è teoricamente illimitato.
 - il problema della identificazione sia degli implicanti primi sia della copertura ottima della funzione è di complessità esponenziale. Questo rende praticamente impossibile identificare una soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine della decina.
 - facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita.
 - consente di utilizzare diverse funzioni di costo purché additive
- Due fasi:
 - 1) **Ricerca e identificazione di tutti gli implicanti primi** (o espansione)
 - 2) **Ricerca e identificazione della copertura ottima.**
 - Ottima perché minimizza i costi della rete da implementare.
 - L'individuazione della copertura ottima dipende dalla **cifra di merito** utilizzata per stimare i costi
 - Per semplicità si fa riferimento alla sola forma *Somma di Prodotti* (SOP). Il procedimento mostrato in questa sezione è facilmente estendibile alla forma *prodotti di somme* (POS).



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

- La ricerca degli **implicanti primi** viene attuata applicando **sistematicamente la semplificazione**

$$aZ + a'Z = (a+a')Z = Z, \text{ con } Z \text{ termine prodotto}$$

- Identificazione degli implicanti primi:**

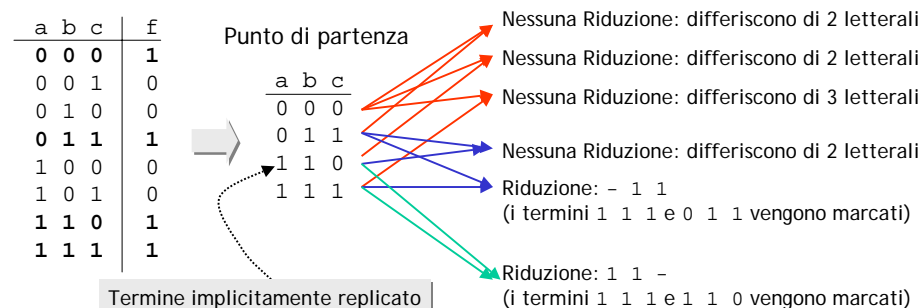
- Il punto di partenza è l'insieme dei **mintermini** della funzione;
 - Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto ricavati al passo precedente;
 - Si semplificano tutte quelle coppie che hanno una parte comune ed una sola variabile differente;
 - Da ogni semplificazione si costruisce un termine prodotto, con meno letterali, che verrà utilizzato al passo successivo
 - I termini prodotto semplificati vengono marcati;
 - La marcatura rende evidente che i **mintermini/implicanti** non sono primi poiché hanno partecipato alla realizzazione di un implicante con meno letterali
 - Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il passo 1
- Il processo ha termine quando non sono più possibili delle riduzioni. I termini prodotto non marcati sono **implicanti primi**.

- 9 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

- Esempio**



Nota: Il confronto esaustivo risolve i problemi sia dovuti alla replicazione dei termini sia legati alla identificazione dei termini da raggruppare.

- 10 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

- Esempio (cont.)**

Punto di partenza

a	b	c
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	1	1

Passo 1

a	b	c
-	1	1
1	1	-

Nessuna Riduzione: i due termini prodotto non sono compatibili poiché nel primo manca a mentre nel secondo manca c.
Fine del processo

Implicanti primi e primi essenziali

Termini non marcati

0 0 0; - 1 1; 1 1 -
a'b'c'; bc; ab

- 11 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

- Il numero dei confronti effettuati può essere ridotto: non vale la pena di confrontare quei termini che sono sicuramente diversi per più di un letterale

- Si costruiscono dei **gruppi costituiti dallo stesso numero di 1**
- Si confrontano tra loro solo le configurazioni che appartengono a **gruppi che differiscono per un solo 1**

- Questo non garantisce che tutti i confronti siano utili; esclude solo i confronti sicuramente improduttivi

Esempio:

	a	b	c	d	
0	0	0	0	0	Il gruppo 0 ed il gruppo 2 non vengono confrontati
2	0	1	1	0	
3	0	1	1	1	Il gruppo 2 ed il gruppo 3 vengono confrontati (solo un confronto è produttivo)
	1	1	0	1	
4	1	1	1	1	Il gruppo 3 ed il gruppo 4 vengono confrontati (tutti i confronti sono produttivi)

- 12 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

□ Algoritmo di Quine - McCluskey

- Definizione di **insieme** S_j^i :
 - insieme dei termini prodotto, all'iterazione j , con un numero di 1 pari ad i .
- Definizione di **etichetta**:
 - Ad ogni termine prodotto è associata una *etichetta* che **identifica l'insieme dei mintermini che esso copre**.
 - L'etichetta di un nuovo termine prodotto è ottenuta per concatenamento delle etichette dei termini da cui proviene
 - L'etichetta facilita la costruzione della tabella di copertura (seconda fase)



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

□ Algoritmo di Quine - McCluskey (cont.)

(ricorda: $i=n^\circ$ di 1, j =iterazione)

J=0;

tutti i *mintermini* appartenenti all'ON-set vengono etichettati e posti nei loro rispettivi S_i^0 ;

Ripeti

Per tutti i k che vanno da $\min(i)$ **fino a** $(\max(i) - 1)$

confronta ogni configurazione in S_k^j con ogni altra in S_{k+1}^j . Le configurazioni semplificate vengono marcate ed il risultato della semplificazione viene etichettato e posto in S_k^{j+1} .

J=J+1;

Fino a che non sono più possibili delle riduzioni

Tutte le configurazioni **non marcate** sono *implicanti primi o primi essenziali*



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

□ Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(1,9,11,12,13,14,15)$

0001 1 ✓	-001 1,9	
1001 9 ✓	10-1 9,11 ✓	
1100 12 ✓	1-01 9,13 ✓	
1011 11 ✓	110- 12,13 ✓	1--1 9,11,13,15
1101 13 ✓	11-0 12,14 ✓	11-- 12,13,14,15
1110 14 ✓	1-11 11,15 ✓	
1111 15 ✓	11-1 13,15 ✓	
	111- 14,15 ✓	

Implicanti Primi e primi essenziali:

P0(1,9): $b' c' d$
 P1(9,11,13,15): $a d$
 P2(12,13,14,15): $a b$



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

□ Osservazione

1001 9 ✓	10-1 9,11 ✓	1-01 9,13 ✓	1--1 9,11,13,15
1011 11 ✓	1-01 9,13 ✓	1-11 11,15 ✓	1--1 9,11,13,15
1101 13 ✓	1-11 11,15 ✓	11-1 13,15 ✓	
1111 15 ✓	11-1 13,15 ✓		

0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 1 ¹³ 1 ⁹	0 0 1 ¹³ 1 ⁹	0 0 1 ¹³ 1 ⁹
0 0 1 ¹⁵ 1 ¹¹	0 0 1 ¹⁵ 1 ¹¹	0 0 1 ¹⁵ 1 ¹¹
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0

Il confronto esaustivo identifica **tutti** i possibili raggruppamenti. Nei passi intermedi il numero dei termini può aumentare considerevolmente per poi ridursi nei passi conclusivi



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Prima Fase*

□ Esempio

0001	1 ✓	00-1	1, 3 ✓	0--1	1, 3, 5, 7 ✓	---1	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
0011	3 ✓	0-01	1, 5 ✓	-0-1	1, 3, 9, 11 ✓		
0101	5 ✓	-001	1, 9 ✓	--01	1, 5, 9, 13 ✓		
1001	9 ✓	0-11	3, 7 ✓	--11	3, 7, 11, 15 ✓		
0111	7 ✓	-011	3, 11 ✓	-1-1	5, 7, 13, 15 ✓		
1011	11 ✓	01-1	5, 7 ✓	1--1	9, 11, 13, 15 ✓		
1101	13 ✓	-101	5, 13 ✓				
1111	15 ✓	10-1	9, 11 ✓				
		1-01	9, 13 ✓				
		-111	7, 15 ✓				
		1-11	11, 15 ✓				
		11-1	13, 15 ✓				

- 17 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Seconda Fase*

- Identificare un **sotto insieme degli implicanti** ottenuti dalla prima fase tale per cui **nessun 1** della funzione rimanga *scoperto*
- Si fa uso della *tabella degli implicanti* o *tabella di copertura*.
 - È una matrice binaria dove:
 - Gli indici di riga sono gli **implicanti primi** identificati
 - Gli indici di colonna sono i **mintermini** appartenenti all'ON-set della funzione.
 - Gli elementi $a_{i,j}$ della matrice sono pari a x (o 1) quando l'implicante i_{esimo} copre il **mintermine** j_{esimo} ; altrimenti nulla (o 0)

P0(1, 9):	b'c'd		1	9	11	12	13	14	15
P1(9, 11, 13, 15):	ad	⇒	P0	x	x				
P2(12, 13, 14, 15):	ab		P1		x	x		x	x
			P2			x	x	x	x

- 18 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Seconda Fase*

- **Ricerca della copertura ottima:** si deve introdurre la **funzione costo**
- Il costo si introduce aggiungendo di fianco alla colonna degli implicanti il loro costo espresso tramite una delle cifre di merito relative all'area
- In generale, nella colonna costo, viene riportato il **n° di letterali** di ogni implicante
- Nel metodo a singola uscita, se l'indicazione di **costo** viene **omessa** si intende che gli implicanti hanno tutti lo **stesso costo** e quindi si procede solo minimizzando la cardinalità della copertura

- 19 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Seconda Fase*

- Il problema della copertura è intrattabile (NP completo):
 - Si utilizzano criteri di **essenzialità** e **dominanza** per ridurre la complessità del problema (ridurre le dimensioni della tabella).
 - Successivamente si utilizza *Branch&Bound*
- Le relazioni tra gli implicanti identificati e i **mintermini** da coprire che permettono la **semplificazione della tabella di copertura** sono:
 - **Criterio di Essenzialità** (non dipende dalla funzione costo)
 - È un **criterio di scelta** (inserisce elementi nell'insieme di copertura) e, di conseguenza, **di semplificazione** poiché identifica ed estrae degli implicanti primi essenziali;
 - **Criterio di Dominanza**
 - È un **criterio di sola semplificazione** poiché riduce la dimensione della tabella di copertura eliminando righe (*implicanti*) o colonne (*mintermini*) senza operare alcuna scelta
 - **Dominanza di riga** (dipende dalla funzione costo)
 - **Dominanza di colonna** (non dipende dalla funzione costo)
 - Una volta applicata l'essenzialità potrei fare una ricerca esaustiva

- 20 -



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: Seconda Fase

■ Criterio di Essenzialità:

- Descrizione:
 - Se una colonna contiene **una sola x** (*colonna singolare*), la riga che gli corrisponde è relativa ad un implicante primo essenziale (*riga essenziale*)
- Semplificazione:
 - La riga essenziale e le colonne da essa coperte vengono eliminate dalla tabella. All'insieme di copertura viene aggiunto l'implicante identificato

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
P0	x	x									x
P1		x	x				x		x		
P2				x	x	x	x				x
P3	x		x	x	x	x	x	x	x		x
P4	x	x			x	x		x	x		

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura: \emptyset Insieme di copertura: {P3}



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: Seconda Fase

■ Criterio di dominanza di riga:

- Descrizione:
 - Un implicante P_i **domina un implicante** P_j quando P_i copre almeno tutti i *mintermini* coperti da P_j .
- Semplificazione:
 - P_j è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga) se e solo se il suo **costo** è maggiore o uguale a quello di P_i .

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

	B	E	I	K
P0	x			x
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura: {P3} Insieme di copertura: {P3}



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: Seconda Fase

■ Criterio di dominanza di riga (cont.):

- Estrazioni Indotte:
 - L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali;
 - Poiché questi ultimi divengono essenziali a causa di eliminazioni di riga, le righe ad essi associate vengono chiamate *righe essenziali secondarie* (implicanti primi secondari).

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

	B	E	I	K
P0	x			x
P2		x		x
P4	x	x	x	

	K
P0	x
P2	x

Insieme di copertura: {P3} Insieme di copertura: {P3} Insieme di copertura: {P3; P4}



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: Seconda Fase

■ Dominanza tra colonne:

- Descrizione:
 - Un *mintermine* m_i **domina un mintermine** m_j se m_j è coperto dagli stessi implicanti di m_i più almeno 1
 - m_j è generato da tutti gli implicanti di m_i e da qualcuno in più. Per semplificare le scelte nella tabella, mantengo solo m_i che genera minori scelte, ma che assicura la copertura anche di m_j .
- Semplificazione:
 - m_j è eliminato dalla tabella. La semplificazione eseguita porta ad una copertura di costo non maggiore di quello che si otterrebbe mantenendo entrambi i mintermini, qualunque sia il costo associato ai termini prodotto stessi.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Seconda Fase*

□ Dominanza tra colonne (cont.):

- Significato:

- Coprire il mintermine I induce la copertura anche di B .

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

→

	E	I	K
P0			x
P1		x	
P2	x		x
P4	x	x	

Insieme di copertura: {P3}

Insieme di copertura: {P3}

• se B non viene semplificato le possibili coperture dei mintermini B e I sono {P0, P1} oppure {P0, P4} oppure {P1} oppure {P4}

• se B viene semplificato le possibili coperture del mintermine I (che induce anche la copertura di B) sono {P1} oppure {P4}



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Seconda Fase*

- Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, si definisce **ciclica** (non riducibile): *tabella ciclica degli implicanti primi*.
- Se la tabella è vuota, è stato determinato l'insieme di copertura.
- La scelta degli implicanti, in una tabella non riducibile, richiede l'applicazione di **algoritmi specifici di ricerca della copertura** come ad esempio:
 - **Branch and Bound (B&B)**: metodo (generale) di **ottimizzazione combinatoria**, che consente di identificare la **combinazione ottima** di un numero finito di variabili discrete, secondo un prefissato criterio di valutazione
 - Nel caso di **copertura di tabelle cicliche di implicanti**, gli implicanti costituiscono le variabili e il criterio di valutazione è il costo (cardinalità o letterali) da minimizzare, con il vincolo della copertura



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Branch&Bound*

- Il metodo genera molte possibili soluzioni attraverso un processo di ricerca che può crescere esponenzialmente con le dimensioni della funzione.
- Data una soluzione, ottenuta ad un certo passo della ricerca, non è possibile dire se questa è ottima senza prima aver esaminato tutte le possibili alternative.
- Per ridurre la complessità della ricerca (numero di alternative esaminate) il metodo di B&B lavora appoggiandosi ad un **albero delle scelte (branch)**, che genera, ad ogni scelta, una **copertura parziale o finale** con un **costo associato**
 - una volta individuata una **soluzione finale**, il suo **costo** viene considerato il **bound** da non superare nelle esplorazioni successive
 - la ricerca prosegue su tutte le scelte rimanenti. Quando viene individuata una soluzione parziale o finale con **costo associato maggiore o uguale al bound**, la ricerca lungo quel ramo dell'albero termina
 - quando viene individuata una **soluzione finale** con **costo inferiore alla precedente**, questo diventa il **nuovo bound**. La soluzione precedente viene scartata e la ricerca prosegue fino al termine dell'esame di tutte le alternative possibili



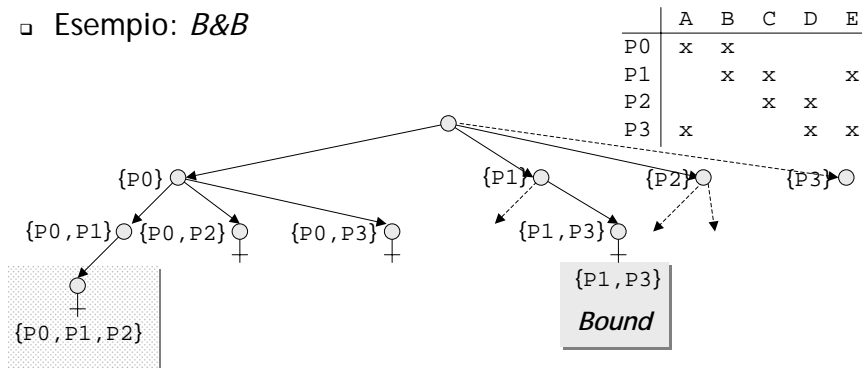
Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: *Branch&Bound*

- **Branch&Bound**: ogni scelta (branch) corrisponde ad un ramo dell'albero delle scelte
 - Si sceglie un implicante primo P_i come appartenente alla soluzione e si elimina la riga corrispondente e le colonne coperte da P_i dalla tabella di copertura.
 - La tabella ridotta viene esaminata per altre possibili semplificazioni (righe essenziali o relazioni di dominanza) che possono portare direttamente ad una soluzione finale S_i di costo C_i .
 - Se la tabella ottenuta dalle semplificazioni, non è riducibile si sceglie un secondo implicante P_j tra quelli rimasti (considerando quindi come possibile copertura parziale la coppia $P_i P_j$) iterando il procedimento di semplificazione e così fino a coprire la funzione a costo C_i .
 - Una volta individuata una soluzione si risale nell'albero, per esaminare le scelte rimaste.
 - Si mantiene sempre la soluzione a costo minore (**bound**) e si confronta il costo ottenuto con il costo minore, quando lo si supera quella soluzione viene abbandonata.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: Seconda Fase

□ Esempio: B&B



Dalla scelta di P0, si procede scegliendo P1 e quindi P2, identificando la soluzione {P0, P1, P2}. Il ramo {P0, P1, P3} non viene esaminato perché porterebbe ad un soluzione dello stesso costo di quella individuata. Si risale fino a P0 per esaminare le soluzioni derivate dalla scelta {P0, P2}, e così via. Individuata la soluzione {P1, P3}, questa costituisce il nuovo bound e, nell'esempio, il procedimento di ricerca termina perché tutte le altre soluzioni sono di costo non inferiore a 2 implicanti.



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: Sommario

- Identificazione degli implicanti primi
- Soluzione della tabella di copertura
 1. Identificazione e scelta degli implicanti primi essenziali primari;
 2. Applicazione della dominanza di colonna e di riga;
 3. Identificazione e scelta degli implicanti primi essenziali secondari; se ne esistono si ritorna al passo 2, altrimenti vai al passo 4;
 4. Applicazione dell'algoritmo di B&B



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey

□ Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(1,4,5,6,9,13,14,15)$

0001	1	✓
0100	4	✓
0101	5	✓
0110	6	✓
1001	9	✓
1101	13	✓
1110	14	✓
1111	15	✓

0-01	1,5	✓
-001	1,9	✓
010-	4,5	
01-0	4,6	
-101	5,13	✓
-110	6,14	
1-01	9,13	✓
11-1	13,15	
111-	14,15	

--01 1,5,9,13

Implicanti Identificati:

- P0(1,5,9,13): $c'd$
- P1(4,5): $a'bc'$
- P2(4,6): $a'bd'$
- P3(6,14): bcd'
- P4(13,15): abd
- P5(14,15): abc



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey

□ Esempio (cont.):

	1	4	5	6	9	13	14	15
P0	x	x	x	x				
P1		x	x					
P2		x		x				
P3				x			x	
P4						x		x
P5							x	x

Essenzialità

	4	6	14	15
P1	x			
P2	x	x		
P3			x	x
P4				x
P5				x

Dominanza di riga

Insieme di copertura: {P0}

	4	6	14	15
P2	x	x		
P3		x	x	
P5			x	x

Essenzialità secondaria

Insieme di copertura: {P0, P2, P5}

$f(a, b, c, d) = c'd + a'bc' + abc$



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey : DC

□ L'estensione alle funzioni *non completamente specificate* richiede l'aggiunta delle seguenti regole:

- Ricerca degli implicanti primi:

- Nel passo relativo alla generazione degli implicanti primi, le condizioni di indifferenza sono trattate come 1.

- Ricerca della copertura ottima:

- Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini appartenenti all'ON-set.
 - L'ON-set rappresenta l'insieme dei termini che vincola la funzionalità da realizzare.
 - Il DC-set è l'insieme dei termini che rappresenta i gradi di libertà per realizzare la funzionalità stessa: non è obbligatorio sceglierli, può essere conveniente



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey : DC

Attenzione!!

- Se al termine del procedimento di generazione di implicanti primi, uno dei termini non marcati ha un'etichetta costituita da soli DC, il termine generato **non è un implicante della funzione**
- Si noti che se venisse considerato nella tabella di copertura, la sua inclusione genererebbe una riga vuota



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Quine-McCluskey: DC

□ Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(0,2,12,13) DC(4,5)$

0000	0	✓	00-0	0,2	
0010	2	✓	0-00	0,4	
0100	4	✓	010-	4,5	✓
0101	5	✓	-100	4,12	✓
1100	12	✓	-101	5,13	✓
1101	13	✓	110-	12,13	✓

⇒ -10- 4,5,12,13

Implicanti Identificati:

- P0: $a'b'd'$
- P1: $a'c'd'$
- P2: bc'

		Essenziali			
		0	2	12	13
P0	x	x			
P1	x				
P2				x	x

⇒ $f(a,b,c,d) = a'b'd' + bc'$



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Modelli di costo per area

- Consideriamo le **due differenti cifre di merito** per attribuire il costo agli implicanti:
 - **Cardinalità**: il costo di ciascuna porta (AND e OR) è considerato indipendente dal numero degli ingressi (minimizzazione della cardinalità).
 - **Letterali**: il costo di una porta dipende anche dal numero degli ingressi (minimizzazione del n° di letterali della copertura).
- Per funzioni a **singola uscita** a n variabili
 - Minimizzazione cardinalità ↔ minimizzazione letterali
 - Solo per $n \leq 4$
 - Per $n=5$ a pari numero di letterali posso avere diversa cardinalità
 - Per $n>5$ posso avere cardinalità inferiore e numero di letterali superiore



Cardinalità: numero ingressi ininfluyente

- In questo modello, conta solo il numero delle porte AND e OR utilizzate
- Le porte OR e AND hanno un numero arbitrario di ingressi
- Poiché la sintesi lavora con forme SOP, il numero di porte OR non varia tra le implementazioni, quindi il costo dell'implementazione è proporzionale al numero di porte AND utilizzate (dualmente con forme POS è proporzionale al numero di porte OR utilizzate)
- Se attribuiamo costo uguale a tutti gli implicant, minimizzare la somma degli implicant utilizzati equivale a **minimizzare il numero di porte AND**, e quindi il numero complessivo di porte

- 37 -

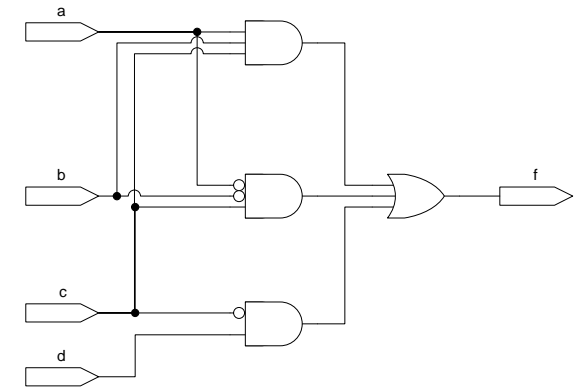


Cardinalità: valutazione del costo

SOP ottimizzata

$$f = abc + a'b'c + c'd$$

Implicanti	costo
abc	1
a'b'c	1
c'd	1
f	3



Numero porte ANDOR = n° imp. + 1

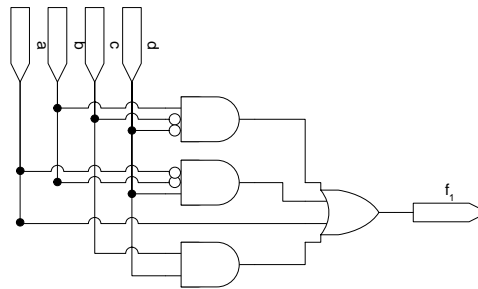
Numero porte ANDOR = 3 + 1

- 38 -



Cardinalità: ulteriore raffinamento della valutazione del costo

- In una forma SOP ottimizzata possono essere presenti implicant costituiti da un solo letterale
- Questi implicant vengono considerati a tutti gli effetti ai fini della cardinalità
- Nell'implementazione questi implicant non "generano" nessuna porta AND ma costituiscono semplicemente degli ingressi alla porta OR
- La relazione tra cardinalità e numero delle porte diventa



Numero porte ANDOR = n° impl. - n° impl. con un solo letterale + 1

Numero porte ANDOR = 4 - 1 + 1 = 4

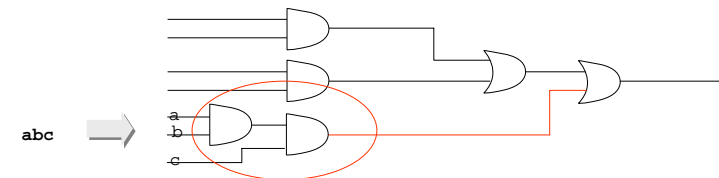
- 39 -



Letterali: valutazione del costo

- Tra tutte le possibili dipendenze, consideriamo quella che si crea implementando le porte a più ingressi con porte a due ingressi
- In questo caso, ogni impicante a **n ingressi** aggiunto alla soluzione contribuisce nell'implementazione con:

- **n-1 porte AND a 2 ingressi** per realizzare il prodotto
- **1 ingresso alla porta OR**



- Il costo di un impicante è quindi pari al **numero dei suoi letterali**

- 40 -

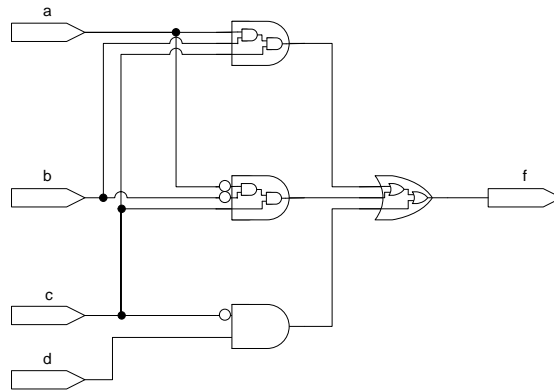


Letterali: valutazione del costo

SOP ottimizzata

$$f = abc + a'b'c + c'd$$

Implicanti	costo
abc	3
a'b'c	3
c'd	2
<hr/>	
f	8



Numero porte AND/OR = Sommatoria letterali - 1

Numero porte AND/OR = 8 - 1