



Politecnico di Milano

Dipartimento di Elettronica e Informazione

prof.ssa Anna Antola
prof.ssa Cristiana Bolchini

prof. Fabrizio Ferrandi

Reti Logiche A - Prova di mercoledì 17 novembre 2004

Matricola _____

Cognome _____ Nome _____

Istruzioni

- Scrivere solo sui fogli distribuiti. Non separare questi fogli.
- È vietato portare all'esame libri, eserciziari, appunti e calcolatrici. Chiunque venga trovato in possesso di documentazione relativa al corso – anche se non strettamente attinente alle domande proposte – vedrà annullata la propria prova.
- Non è possibile lasciare l'aula conservando il tema della prova in corso.
- Tempo a disposizione: 2h:00m.

Valore indicativo di domande ed esercizi e voti parziali:

Esercizio 1 (2 punti) _____

Esercizio 2 (2 punti) _____

Esercizio 3 (2 punti) _____

Esercizio 4 (2 punti) _____

Esercizio 5 (3 punti) _____

Esercizio 6 (3 punti) _____

Esercizio 7 (2 punti) _____

Esercizio 8 (punteggio non preassegnato) _____

Esercizio n. 1

Data la seguente espressione logica:

$$a' * ((c' + d')' + e) + ab * (e + ed + cd) + (cde' + e)' * (a' + ab)$$

la si semplifichi, utilizzando le proprietà dell'algebra di commutazione. Riportare per ogni passaggio la proprietà utilizzata.

Soluzione:

$$a' * ((c' + d')' + e) + ab * (e + ed + cd) + (cde' + e)' * (a' + ab)$$

=> Assorbimento: $e + ed = e$

$$a' * ((c' + d')' + e) + ab * (e + cd) + (cde' + e)' * (a' + ab)$$

=> De Morgan: $(c' + d')' = (c') * (d)'$;

$$a' * ((c') * (d)') + e) + ab * (e + cd) + (cde' + e)' * (a' + ab)$$

=> Involuzione: $(c')' = c$

$$a' * (c * (d)') + e) + ab * (e + cd) + (cde' + e)' * (a' + ab)$$

=> Involuzione: $(d)'' = d$

$$a' * (cd + e) + ab * (e + cd) + (cde' + e)' * (a' + ab)$$

=> Semplificazione: $cde' + e = cd + e$;

$$a' * (cd + e) + ab * (e + cd) + (cd + e)' * (a' + ab)$$

=> Commutativa: $e + cd = cd + e$;

$$a' * (cd + e) + ab * (cd + e) + (cd + e)' * (a' + ab)$$

=> Distributiva: $a'(cd + e) + ab(cd + e) = (cd + e)(a' + ab)$;

$$(cd + e) * (a' + ab) + (cd + e)' * (a' + ab)$$

=> Distributiva: $(cd + e) * (a' + ab) + (cd + e)' * (a' + ab) = (a' + ab) * ((cd + e) + (cd + e)')$;

$$(a' + ab) * ((cd + e) + (cd + e)')$$

=> Inverso: $(cd + e) + (cd + e)' = 1$;

$$(a' + ab) * 1$$

=> Elemento Neutro: $(a' + ab) * 1 = a' + ab$;

$$a' + ab$$

=> Semplificazione: $a' + ab = a' + b$;

$$a' + b$$

=> Soluzione Finale.

Esercizio n. 2

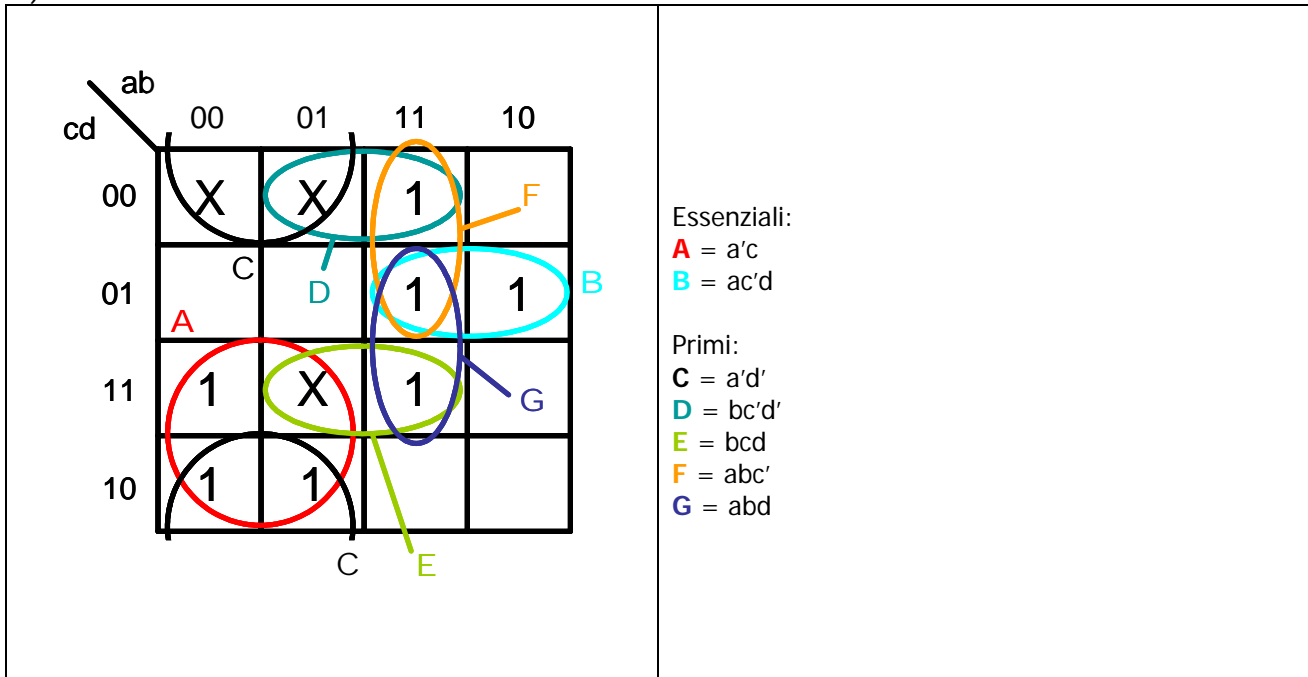
Data la seguente funzione ad una uscita, non completamente specificata:

$$F(a,b,c,d) = \text{ONset}(2,3,6,9,12,13,15) \text{ DCset}(0,4,7)$$

- I) Sulla mappa di Karnaugh individuare gli implicanti primi **riportandone la forma algebrica** e separando gli implicanti *primi* da quelli *primi ed essenziali*.
- II) Ricavare tutte le forme minime scegliendo una opportuna copertura della funzione sulla mappa, che minimizzi il numero di implicanti utilizzati ed il numero di letterali.
- III) Ricavare il costo della copertura ottenuta, utilizzando come costo il numero di letterali.

Soluzione:

I)



II)

$$A+B+D+E; \quad A+B+D+G; \quad A+B+E+F; \quad A+B+F+G$$

III)

- Le soluzioni costano $2(A)+3(B)+3(D \text{ o } F)+3(E \text{ o } G)=11$.

Esercizio n. 3

Data la seguente tabella di copertura:

	F1					F2					
	m0	m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	Costo
A					X				X		3
B						X	X	X			3
C			X						X		3
D	X	X					X	X			3
E										X	3
F						X				X	3
G								X			2
H			X	X							2
I					X						2
L	X	X									2
M				X							2

- Si trovi una copertura minima utilizzando il metodo di Quine McCluskey (m_{xn} rappresenta un generico mintermine).
- Descrivere ogni singolo passo svolto per arrivare alla soluzione nella sequenza di applicazione

Soluzione:

$$F1 = H + A + D$$

$$F2 = F + A + D$$

PASSI:

- 1) F domina E -> E eliminato -> F essenziale per F2
- 2) H domina M -> M eliminato -> H essenziale per F1
- 3) A domina C -> C eliminato -> A essenziale per F2 -> costo A=1
- 4) A domina I -> I eliminato -> A essenziale per F2
- 5) M7 domina M6 -> M7 eliminato
- 6) D domina B -> B eliminato -> D essenziale per F2 -> costo D=1
- 7) D domina L -> L eliminato -> D essenziale per F1

Esercizio n. 4

Eseguire la generazione degli implicanti primi con il metodo di Quine McCluskey per la seguente funzione multiuscita $F(F1;F2)$.

$F1 =$ on-set(m0, m5, m7, m12, m13)
dc-set(m4,m10,m11)

$F2 =$ on-set(m2,m3,m5,m7,m12)
dc-set(m8)

Soluzione:

Rilasso il problema trasformando il DC set in ON-Set

```
m0  0000 10  V
--
m2  0010 01  V
m4  0100 10  V
m8  1000 01  V
--
m3  0011 01  V
m5  0101 11  V
m10 1010 10  V
m12 1100 11  ( A )
--
m7  0111 11  V
m11 1011 10  V
m13 1101 10  V
```

```
m0m4    0-00 10  ( B )
--
m2m3    001- 01  ( C )
m4m5    010- 10  V
m4m12   -100 10  V
m8m12   1-00 01  ( D )
--
m3m7    0-11 01  ( E )
m5m7    01-1 11  ( F )
m5m13   -101 10  V
m10m11  101- 10  ( G )
m12m13  110- 10  V
```

```
m4m5m12m13  -10- 10  ( H )
```

Ritorno al problema iniziale, gli implicanti primi rimangono:

A, B, C, D, E, F, H

G copre solo DC di $f1$ quindi non è un implicante primo per il problema iniziale.

Esercizio n. 5

- Scrivere la tabella della verità di una rete logica combinatoria che riceve in ingresso i segnali a , b , c e d che sulle uscite codifica in binario naturale il numero di ingressi con valore 0.
- Scrivere quindi la tabella della verità modificata nel caso in cui i segnali a , b , c e d siano stati codificati in modo tale che il numero di 1 complessivamente presente in ogni configurazione sia sempre dispari.

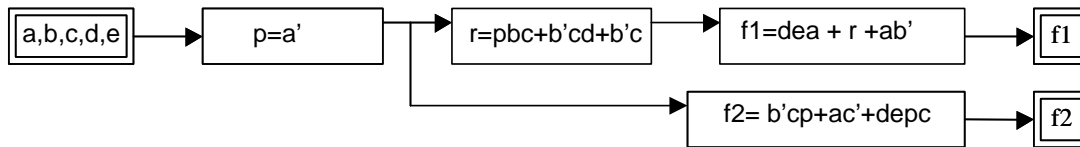
a	b	c	d	$f0$	$f1$	$f2$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0

a	b	c	d	$f1$	$f2$
0	0	0	0	—	—
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	—	—
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	—	—
0	1	1	0	—	—
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	—	—
1	0	1	0	—	—
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	—	—
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	—	—

Nel secondo caso, sono sufficienti due uscite visto che da specifica non è possibile che si presenti l'ingresso con i quattro segnali a 0.

D'altra parte anche l'uscita $f2$ potrebbe essere ritenuta poco significativa in quanto assume sempre valore 1.

Esercizio n. 6



Data la rete multilivello sopra riportata, applicare in sequenza le trasformazioni sotto indicate e rispondere alle domande dove richiesto. Disegnare anche il modello della rete finale.

Nota Bene: per ogni trasformazione è **obbligatorio** riportare il **risultato della trasformazione** e **mostrare chiaramente tutti i passaggi** effettuati per ottenere il risultato stesso.

1. **COST()**: Calcolo del numero di letterali. La funzione $COST()$ calcola il costo in letterali indipendentemente dalla forma (SOP o Multilivello) delle espressioni algebriche dei nodi.
2. **SWEEP**: Eliminazione dei nodi costituiti da un solo letterale.
 - 2a. Mostrare formalmente che il costo della rete ottenuta applicando tale trasformazione è non peggiorativo.
3. **SIMPLIFY(r)**: Minimizzazione a due livelli di r .
 - 3a. Mostrare formalmente che il costo della rete ottenuta applicando tale trasformazione al nodo r è non peggiorativo.
4. **ELIMINATE(r, -2)**: Eliminazione vincolata del nodo r . Il parametro -2 indica la soglia di incremento di area per accettare o meno la trasformazione.
5. **FACTOR(f1)**: Fattorizzazione del nodo f_1 .
6. **[s] = EXTRACT(f1, f2)**: Estrazione di un fattore comune a f_1 e f_2 . Il nodo s derivato dall'estrazione può essere un nuovo nodo o un nodo già presente nella rete.
7. **COST()**: Calcolo del numero di letterali.

Soluzione

1. **COST()**: 24 letterali

2. **SWEEP**: Viene eliminato il solo nodo p . Quindi:

$$r = a'bc + b'cd + b'c$$
$$f_2 = b'ca' + ac' + dea'c$$

2a. L'espressione $(n \cdot l - n - l)$ fornisce l'incremento di area in letterali di una rete a seguito dell'eliminazione di un nodo (l è il numero di letterali del nodo eliminato e n è il numero di nodi che lo assorbono). Nel caso di nodi eliminati costituiti da un solo letterale l'incremento di area è sempre pari a -1 , qualunque sia il numero di nodi che assorbono.

3. **SIMPLIFY(r)**: Minimizzazione a due livelli di r .

Tramite mappe di Karnaugh o manipolazione algebrica ottima, il risultato della minimizzazione dell'espressione $r = a'bc + b'cd + b'c$ è

$$r = a'c + b'c$$

3a. L'espressione da minimizzare a due livelli è già una forma SOP, quindi la sua ottimizzazione non può essere peggiorativa (da SOP a SOP minima).

4. **ELIMINATE(r,-2)**: Eliminazione vincolata del nodo r. Il parametro -2 indica la soglia di incremento di area per accettare o meno la trasformazione.

Applicando ancora l'espressione per il calcolo di incremento di area $n \cdot l - n - l$ (con $l=5$, numero di letterali di r e $n=1$, un solo nodo -f1- assorbe r), l'incremento risulta = -1. E' quindi al di sopra del valore -2 della soglia di accettazione. La trasformazione non viene accettata e le espressioni dei nodi restano quelle del passo precedente.

Lo stesso risultato si poteva ottenere eliminando il nodo e calcolando il nuovo costo della rete.

5. **FACTOR(f1)**: Fattorizzazione del nodo f1.

L'algoritmo visto a lezione porta alla fattorizzazione

$$f1 = a(de + b') + r$$

6. **[s] = EXTRACT(f1,f2)**: estrazione di un fattore comune a f1 e f2. Il nodo s derivato dall'estrazione può essere un nuovo nodo o un nodo già presente nella rete.

$$s = de + b'$$

$$f1 = as + r$$

$$f2 = a'cs + ac'$$

7. **COST()**: 15 letterali

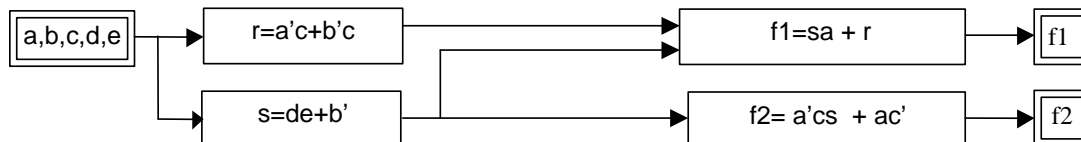
La rete è infatti composta dai seguenti nodi

$$r = a'c + b'c$$

$$s = de + b'$$

$$f1 = as + r$$

$$f2 = a'cs + ac'$$



Esercizio n. 7

Dati due numeri decimali $A=3.546875$ e $B=0.162109375$. Fornire la codifica completa in virgola mobile a singola precisione di A e B.

Effettuare la somma $A+B$ indicando tutti i passaggi relativi sia alla codifica che alla somma.

Soluzione

$$3,546875_{10} = 0\ 10000000\ 110001100000000000000000$$

$$0,162109375_{10} = 0\ 01111100\ 010011000000000000000000$$

Denormalizzo e sommo:

$$\begin{array}{r} 1.11000110000000000000000000000000 + \\ 0.000101001100000000000000000000 = \\ \hline 1.110110101100000000000000000000 \end{array}$$

La codifica normalizzata e'

$$3.708984375_{10} = 0\ 10000000\ 110110101100000000000000$$

