A.A. 2003/2004
Esercizi di Reti Logiche A *

A cura di F. Ferrandi, C. Silvano

Ultimo aggiornamento, 11 novembre 2003

*Questi appunti sono stati possibili anche per il lavoro fatto da alcuni studenti del corso di Reti Logiche A - A.A. 2003-2004

1 Minimizzazione di espressioni logiche con le proprietà dell'algebra di Boole

1.1 Esercizi con soluzione

Esercizio 1.1 - Data la seguente funzione F:

$$\mathsf{F} = \mathsf{a'bcd} + \mathsf{abcd} + \mathsf{ab'cd} + \mathsf{a'bc'd}$$

1. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.
(Ad esempio, Proprietà Associativa oppure (AB)C=A(BC))

Soluzione

1. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$\begin{array}{lcll} F & = & a'bd(c+c') + abcd + ab'cd & (per\ distributiva) \\ F & = & a'bd(c+c') + acd(b+b') & (per\ distributiva) \\ F & = & a'bd + acd(b+b') & (per\ inverso) \\ F & = & a'bd + acd & (per\ inverso) \end{array}$$

∎

Esercizio 1.2 - Data la seguente funzione F:

$$\mathsf{F} = \mathsf{a'b'c'd'} + \mathsf{a'b'c'd} + \mathsf{a'b'cd'} + \mathsf{abc'd'} + \mathsf{ab'c'd'} + \mathsf{abcd'} + \mathsf{ab'cd'}$$

1. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.
(Ad esempio, Proprietà Associativa oppure (AB)C=A(BC))

Soluzione

1. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$
\begin{array}{rcll}
F & = & a'b'c'd' + a'b'c'd' + a'b'c'd + a'b'cd' + abc'd' + ab'c'd' + & \\
 & & abcd' + ab'cd' & (per\ idempotenza) \\
F & = & (a'b'c'd' + ab'c'd') + (a'b'c'd' + a'b'c'd) + (a'b'cd' + ab'cd') + & \\
 & & +(abc'd' + abcd') & (per\ associativa) \\
F & = & (a' + a)b'c'd' + (d' + d)a'b'c' + (a' + a)b'cd' + (c' + c)abd' & (per\ distributiva) \\
F & = & b'c'd' + a'b'c' + b'cd' + abd' & (pr.\ inverso) \\
F & = & (c' + c)b'd' + a'b'c' + abd' & (per\ distributiva) \\
F & = & b'd' + a'b'c' + abd' & (per\ inverso) \\
F & = & (b' + ab)d' + a'b'c' & (per\ distributiva) \\
F & = & (b' + a)d' + a'b'c' & (per\ \mathsf{a'b + a = b + a}) \\
F & = & b'd' + a'b'c' + ad' & (per\ distributiva)
\end{array}
$$

∎

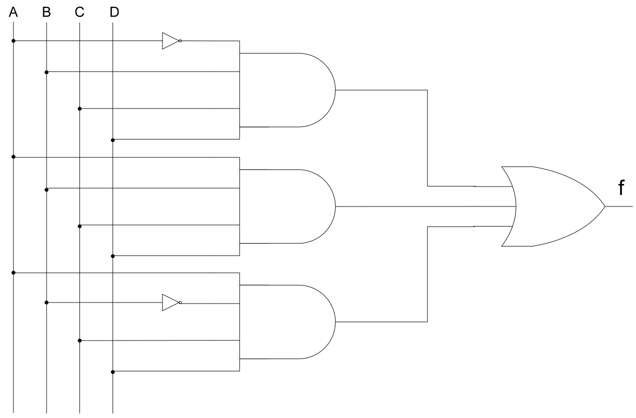
Esercizio 1.3 - Data la seguente funzione F:

$$\mathsf{F = a'bcd + abcd + ab'cd}$$

1. Disegnare il circuito corrispondente.
2. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato. (Ad esempio, Proprietà Associativa oppure (AB)C=A(BC)):

Soluzione

1. Il circuito corrispondente è:



2. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$\begin{aligned}
F &= a'bcd + abcd + ab'cd + abcd && (\textit{per idempotenza})\\
F &= (a+a')bcd + ab'cd + abcd && (\textit{per distributiva})\\
F &= (a+a')bcd + acd(b+b') && (\textit{per distributiva})\\
F &= bcd + acd(b+b') && (\textit{per inverso})\\
F &= bcd + acd && (\textit{per inverso})
\end{aligned}$$

∎

Esercizio 1.4 - Data la seguente funzione F:

$$\mathsf{F}_{(\mathsf{a,b,c})} = \mathsf{a'b'c'} + \mathsf{a'b'c} + \mathsf{a'bc'} + \mathsf{ab'c'}$$

1. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.
   (Ad esempio, Proprietà Associativa oppure (AB)C=A(BC))

Soluzione

1. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$\begin{aligned}
F &= a'b'c' + a'b'c + ab'c' + a'b'c' + a'bc' + a'b'c' && (\textit{per idempotenza})\\
F &= a'b'(c'+c) + b'c'(a+a') + a'c'(b+b') && (\textit{per distributiva})\\
F &= a'b' + b'c' + a'c' && (\textit{per inverso})
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5 - Data la seguente tabella della verità di F:

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Ricavare l'espressione logica SOMMA DI PRODOTTI (prima forma canonica)
2. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.
   (Ad esempio, Proprietà Associativa oppure (AB)C=A(BC))

Soluzione

1. La prima forma canonica di F è:
$$F = a'b'c + a'bc' + a'bc + abc$$
2. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:
$$\begin{array}{lcll} F & = & a'b'c + a'bc + a'bc' + a'bc + abc + a'bc & (per\ idempotenza) \\ F & = & a'c(b' + b) + a'b(c' + c) + bc(a' + a) & (per\ distributiva) \\ F & = & a'c1 + a'b1 + bc1 & (per\ inverso) \\ F & = & a'c + a'b + bc & (per\ elemento\ neutro) \end{array}$$

Esercizio 1.6 - Data la seguente tabella della verità della funzione F a due uscite:

A	B	C	f1	f2
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

1. A partire dalla tabella delle verità, ricavare l'espressione logica SOMMA DI PRODOTTI (prima forma canonica)

Soluzione

1. La prima forma canonica di F è:

$$\mathsf{f1} = \mathsf{a'b'c'} + \mathsf{a'b'c} + \mathsf{a'bc'} + \mathsf{ab'c'}$$

$$\mathsf{f2} = \mathsf{a'b'c} + \mathsf{a'bc'} + \mathsf{ab'c'} + \mathsf{abc}$$

∎

2 Minimizzazione di espressioni logiche con le mappe di Karnaugh

2.1 Esercizi con soluzione

Esercizio 2.1 - Data la seguente funzione F definita attraverso il suo $\mathsf{ON_{set}}$:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{m_3, m_4, m_6, m_7, m_{12}, m_{13}, m_{14}\}$$

Calcolare:

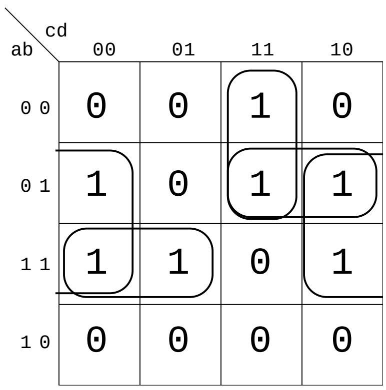
1. L'espressione logica SOMMA DI PRODOTTI (prima forma canonica)
2. Implicanti primi
3. Implicanti primi essenziali
4. Copertura minima
5. Dire se la copertura minima trovata è unica
6. Se la copertura minima trovata non è unica, calcolare un'altra copertura minima

Soluzione

La tabella dei mintermini è:

	a	b	c	d
m3	0	0	1	1
m4	0	1	0	0
m6	0	1	1	0
m7	0	1	1	1
m12	1	1	0	0
m13	1	1	0	1
m14	1	1	1	0

1. $F_{(a,b,c,d)}$ = **a'b'cd+a'bc'd'+a'bcd'+a'bcd+abc'd'+abc'd+abcd'**



2. Implicanti primi: a'cd, a'bc, bd', abc'

3. Implicanti primi essenziali: a'cd, bd', abc'

4. Copertura minima: a'cd+bd'+abc'

5. Dire se la copertura minima trovata è unica: **SI**

∎

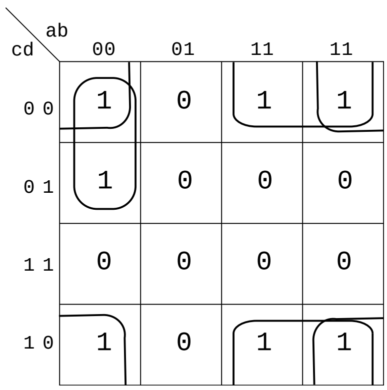
Esercizio 2.2 - Si consideri la seguente funzione F definita attraverso il suo $\mathsf{ON_{set}}$:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{\mathsf{m0, m1, m2, m8, m10, m12, m14}\}$$

Facendo uso della sua mappa di Karnaugh, calcolare:

1. Implicanti primi
2. Implicanti primi essenziali
3. Copertura minima
4. Dire se la copertura minima trovata è unica
5. Se la copertura minima trovata non è unica,calcolare un'altra copertura minima

Soluzione
La mappa di Karnaugh vale:



1. Implicanti primi: a'b'c',b'd',ad'
2. Implicanti primi essenziali: a'b'c',b'd',ad'
3. Copertura minima: a'b'c'+b'd'+ad'
4. Dire se la copertura minima trovata è unica: **SI**

5. Se la copertura minima trovata non è unica,calcolare un'altra copertura minima: /

∎

Esercizio 2.3 - Si consideri la seguente funzione f definita attraverso il suo ON_{set}:

$$ON_{set} = \{m0, m2, m6, m7, m15\}$$

Facendo uso della sua mappa di Karnaugh, calcolare:

1. Implicanti primi
2. Implicanti primi essenziali
3. Copertura minima
4. Dire se la copertura minima trovata è unica
5. Se la copertura minima trovata non è unica,calcolare un'altra copertura minima

SOLUZIONE
La mappa di Karnaugh vale:

cd \ ab	00	01	11	11
0 0	1	0	0	0
0 1	0	0	0	0
1 1	0	1	1	0
1 0	1	1	0	0

1. Implicanti primi: a'b'd',a'cd',a'bc,bcd
2. Implicanti primi essenziali: a'b'd',bcd
3. Copertura minima: a'b'd'+bcd+a'bc
4. Dire se la copertura minima trovata è unica: **NO**
5. Se la copertura minima trovata non è unica,calcolare un'altra copertura minima: a'b'd'+bcd+a'cd'

∎

Esercizio 2.4 - Si consideri la seguente funzione f definita attraverso il suo $\mathsf{ON_{set}}$:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{\mathsf{m3, m4, m6, m7, m12, m13, m14}\}$$

Facendo uso della sua mappa di Karnaugh, calcolare:

1. L'espressione logica SOMMA DI PRODOTTI (prima forma canonica)
2. Implicanti primi
3. Implicanti primi essenziali
4. Copertura minima
5. Dire se la copertura minima trovata è unica
6. Se la copertura minima trovata non è unica,calcolare un'altra copertura minima

Soluzione

La mappa di Karnaugh vale:

cd \ ab	00	01	11	10
0 0	0	1	1	0
0 1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	0
1 0	0	1	1	0

1. Prima forma canonica:

$$\mathsf{f = a'b'cd + a'bc'd' + a'bcd' + a'bcd + abc'd' + abc'd + abcd'}$$

2. Implicanti primi: bd',a'cd,a'bc,abc'
3. Implicanti primi essenziali: bd',a'cd,abc'
4. Copertura minima: b'd'+a'cd+abc'
5. Dire se la copertura minima trovata è unica: **SI**
6. Se la copertura minima trovata non è unica,calcolare un'altra copertura minima: /

∎

Esercizio 2.5 - Si consideri la seguente funzione F definita attraverso il suo $\mathsf{ON_{set}}$:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{m_0, m_2, m_4, m_6, m_7, m_9, m_{13}, m_{15}\}$$

Calcolare:

1. Implicanti primi
2. Implicanti primi essenziali
3. Copertura minima
4. Dire se la copertura minima trovata è unica
5. Se la copertura minima trovata non è unica, calcolare un'altra copertura minima

Soluzione

cd \ ab	00	01	11	10
0 0	1	1	0	0
0 1	0	0	1	1
1 1	0	1	1	0
1 0	1	1	0	0

1. Implicanti primi: a'd', a'bc, bcd, abd, ac'd
2. Implicanti primi essenziali: a'd', ac'd
3. Copertura minima: a'd', ac'd, bcd
4. Dire se la copertura minima trovata è unica: **SI**

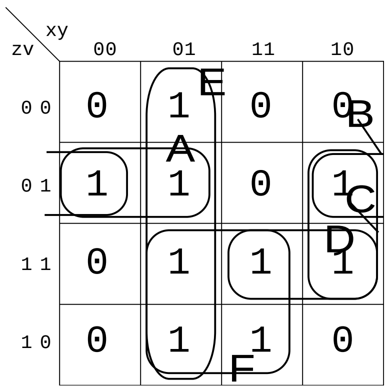
∎

Esercizio 2.6 - Minimizzare la funzione il cui $\mathsf{ON_{set}}$è riportato di seguito:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{\mathsf{m_1, m_4, m_5, m_6, m_7, m_9, m_{11}, m_{14}, m_{15}}\}$$

Soluzione

	x	y	z	v
m_1	0	0	0	1
m_4	0	1	0	0
m_5	0	1	0	1
m_6	0	1	1	0
m_7	0	1	1	1
m_9	1	0	0	1
m_{11}	1	0	1	1
m_{14}	1	1	1	0
m_{15}	1	1	1	1



IMPLICANTI PRIMI:

	x	y	z	v		
A	0	-	0	1	x'z'v	
B	-	0	0	1	y'z'v	
C	1	0	-	1	xy'v	
D	1	-	1	1	xzv	
E	0	1	-	-	x'y	ESS.
F	-	1	1	-	yz	ESS.

Esistono tre coperture minime:

$$E + F + A + C$$

$$E + F + B + C$$

$$E + F + B + D$$

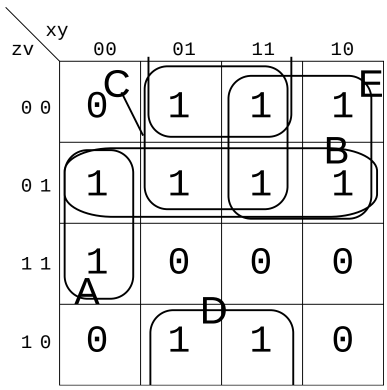
∎

Esercizio 2.7 - Calcolare una copertura minima della funzione definita dal seguente $\mathsf{ON}_{\mathsf{set}}$:

$$\mathsf{ON}_{\mathsf{set}} = \{m_1, m_3, m_4, m_5, m_6, m_8, m_9, m_{12}, m_{13}, m_{14}\}$$

Soluzione

	x	y	z	v
m_1	0	0	0	1
m_3	0	0	1	1
m_4	0	1	0	0
m_5	0	1	0	1
m_6	0	1	1	0
m_8	1	0	0	0
m_9	1	0	0	1
m_{12}	1	1	0	0
m_{13}	1	1	0	1
m_{14}	1	1	1	0



IMPLICANTI PRIMI:

	x	y	z	v		
A	0	0	-	1	x'y'v	ESS.
B	-	-	0	1	z'v	
C	-	1	0	-	yz'	
D	-	1	-	0	yv'	ESS.
E	1	-	0	-	xz'	ESS.

Esistono due coperture minime:

$$A + D + E + B$$

$$A + D + E + c$$

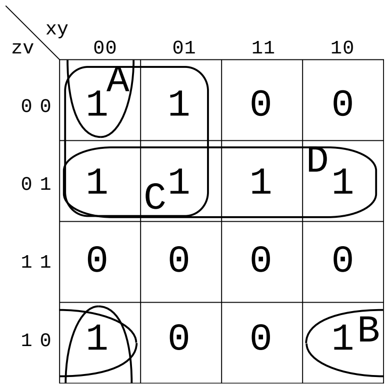
∎

Esercizio 2.8 - Minimizzare la funzione il cui $\mathsf{ON_{set}}$è riportato di seguito:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{\mathsf{m_0}, \mathsf{m_1}, \mathsf{m_2}, \mathsf{m_4}, \mathsf{m_5}, \mathsf{m_9}, \mathsf{m_{10}}, \mathsf{m_{13}}\}$$

SOLUZIONE

	x	y	z	v
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	0	1
m_2	0	0	1	0
m_4	0	1	0	0
m_5	0	1	0	1
m_9	1	0	0	1
m_{10}	1	0	1	0
m_{13}	1	1	0	1



IMPLICANTI PRIMI:

	x	y	z	v		
A	0	0	-	0	x'y'v'	
B	-	0	1	0	y'zv'	ESS.
C	0	-	0	-	x'z'	ESS.
D	-	-	0	1	z'v	ESS.

Esiste una sola copertura minima:

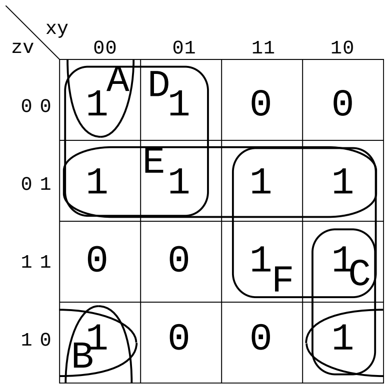
$$B + C + D$$

Esercizio 2.9 - Minimizzare la funzione il cui $\mathsf{ON_{set}}$è riportato di seguito:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{\mathsf{m_0}, \mathsf{m_1}, \mathsf{m_2}, \mathsf{m_4}, \mathsf{m_5}, \mathsf{m_9}, \mathsf{m_{10}}, \mathsf{m_{11}}, \mathsf{m_{13}}, \mathsf{m_{15}}\}$$

Soluzione

	x	y	z	v
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	0	1
m_2	0	0	1	0
m_4	0	1	0	0
m_5	0	1	0	1
m_9	1	0	0	1
m_{10}	1	0	1	0
m_{11}	1	0	1	1
m_{13}	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1



IMPLICANTI PRIMI:

	x	y	z	v		
A	0	0	-	0	x'y'v'	
B	-	0	1	0	y'zv'	
C	1	0	1	-	xy'z	
D	0	-	0	-	x'z'	Ess.
E	-	-	0	1	z'v	
F	1	-	-	1	xv	Ess.

Esiste una sola copertura minima:

$$D + F + B$$

∎

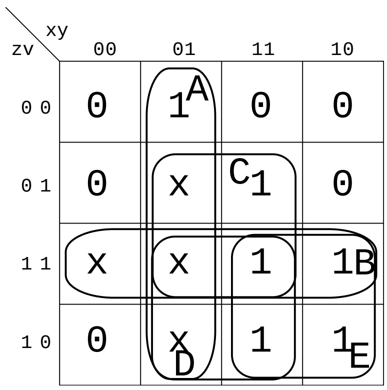
Esercizio 2.10 - Minimizzare la funzione i cui $\mathsf{ON_{set}}$e $\mathsf{DC_{set}}$sono riportati di seguito:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{\mathsf{m_4}, \mathsf{m_{10}}, \mathsf{m_{11}}, \mathsf{m_{13}}, \mathsf{m_{14}}, \mathsf{m_{15}}\}$$

$$\mathsf{DC_{set}} = \{\mathsf{m_3}, \mathsf{m_5}, \mathsf{m_6}, \mathsf{m_7}\}$$

Soluzione

	x	y	z	v	f
m_3	0	0	1	1	x
m_4	0	1	0	0	1
m_5	0	1	0	1	x
m_6	0	1	1	0	x
m_7	0	1	1	1	x
m_{10}	1	0	1	0	1
m_{11}	1	0	1	1	1
m_{13}	1	1	0	1	1
m_{14}	1	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1	1



IMPLICANTI PRIMI:

	x	y	z	v		
A	0	1	-	-	x'y	Ess.
B	-	-	1	1	zv	
C	-	1	-	1	yv	Ess.
D	-	1	1	-	yz	
E	1	-	1	-	xz	Ess.

Esiste una sola copertura minima:

$$A + C + E$$

∎

2.2 Esercizio senza soluzione

Esercizio 2.11 - Si consideri la seguente funzione F definita attraverso il suo $\mathsf{ON_{set}}$:

$$\mathsf{ON_{set}} = \{\mathsf{m_3}, \mathsf{m_4}, \mathsf{m_6}, \mathsf{m_7}, \mathsf{m_{12}}, \mathsf{m_{13}}, \mathsf{m_{14}}\}$$

1. Ricavare l'espressione logica SOMMA DI PRODOTTI (prima forma canonica):
2. Disegnare il circuito corrispondente

Facendo uso della sua mappa di Karnaugh, calcolare:

1. Implicanti primi
2. Implicanti primi essenziali
3. Copertura minima
4. Dire se la copertura minima trovata è unica
5. Se la copertura minima trovata non è unica,calcolare un'altra copertura minima

∎